

Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное

государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Московский физико-технический институт  
(государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

"Транспортные свойства двухслойных неупорядоченных  
электрон-дырочных систем"

Студент 126 гр. Радкевич А.А.

Научный руководитель:  
канд.ф.-м.н., мл.науч.сотр. Семёнов А.Г.

Москва, 2015 г.

# Содержание

1	Введение . . . . .	2
2	Микроскопическая теория . . . . .	2
3	Токовый коррелятор . . . . .	6
4	Флуктуационный пропагатор . . . . .	8
5	Вклад Асламазова-Ларкина . . . . .	16
6	Заключение . . . . .	18

# 1 Введение

Двухслойная электрон-дырочная система - система, состоящая из двух тонких проводящих пластин, расположенных параллельно на малом расстоянии друг от друга, между которыми имеется тонкая изолирующая прослойка. В одной из них носителями заряда являются электроны, а в другой - дырки. Так как носители заряда в разных пластинах заряжены противоположно, то между ними имеется притяжение, обусловленное кулоновским взаимодействием. Это взаимодействие, в зависимости от плотностей носителей заряда и расстояния между пластинами (которое регулирует силу взаимодействия), может приводить к образованию куперовских пар или экситонов и, соответственно, к сверхтекучести, аналогичной получаемой в теории БКШ, либо к образованию экситонного конденсата при достаточно низких температурах (бозе-эйнштейновская конденсация). Переход между этими двумя режимами известен в литературе как БЭК-БКШ кроссовер, и является предметом активных теоретических исследований (например, [7]).

Притяжение между носителями в разных слоях также приводит к такому эффекту, как кулоновское увлечение. Его суть заключается в том, что электрический ток, вызванный приложенным к одному из слоёв (активному слою) напряжением, приводит к появлению в другом (пассивном) слое электрического тока, либо напряжения, если он не входит в замкнутую цепь. Увлечение вызывается неоднородностями плотностей заряда в каждом из слоёв, которые и создают неоднородное электрическое поле в другом слое, ответственное за эффект. Кулоновское увлечение в различных системах широко исследовалось с помощью различных подходов, в частности, в рамках теории возмущений по межслоевому взаимодействию [4], с помощью кинетического уравнения, а также с помощью непертурбативного диаграммного подхода ([5], [6], [8]).

В этой работе строится микроскопическая теория эффекта кулоновского увлечения в системе. Для его описания строится диаграммное представление транспроводимости, которая определяется как отношение тока, возникающего в пассивном слое (в случае замкнутой цепи), к электрическому полю в активном слое. Затем в двух упомянутых предельных случаях исследуется поведение двухчастичных возбуждений в системе, после чего производится вычисление вклада Асламазова-Ларкина в транспроводимость с помощью формулы Кубо.

Мотивацией данной работы является то, что в научной литературе по данной теме не встречается последовательного изложения микроскопической теории эффекта.

## 2 Микроскопическая теория

Для описания системы будем использовать гамильтониан с локальным взаимодействием между носителями заряда

$$\hat{H} = \sum_{i=1,2} \int dx \psi_i^\dagger(x) \left[ \frac{[\hat{p} \mp \frac{e}{c} A_i(x)]^2}{2m_i} - \mu_i \right] \psi_i(x) - g \int dx \psi_1^\dagger(x) \psi_2^\dagger(x) \psi_2(x) \psi_1(x),$$

где  $\psi_i^+(x)$ ,  $\psi_i(x)$  - операторы рождения и уничтожения фермионов в точке внутри  $i$ -го слоя, имеющих, соответственно, массы  $m_i$ , химпотенциалы  $\mu_i$  и заряды  $\mp e$ ,  $A_i(x)$  - вектор-потенциалы в соответствующих слоях, которые и описывают электрические поля, вызывающие токи в системе, а  $g$  - константа, определяющая силу взаимодействия и зависящая от расстояния между слоями.

В этой модели явно не присутствует взаимодействие частиц внутри каждого из слоёв, нет явного взаимодействия с кристаллической решёткой и отсутствует взаимодействие с примесями. Каждый из этих процессов приведёт к тому, что частицы начнут рассеиваться (на фононах, неоднородностях или друг на друге). Мы учтём рассеяние таким образом: позже, когда мы будем использовать функции Грина свободных частиц при расчётах, мы введём феноменологически некоторое время рассеяния, к наличию которого указанные виды взаимодействия и приведут.

В работе будем пользоваться формализмом континуального интеграла (см., например, [11]). В таком подходе межслоевое взаимодействие можно учесть точно, а не по теории возмущений, что позволит увидеть эффекты, возникающие в режиме сильной связи. Этот выбор обусловлен тем, что стало возможным изготовление двухслойных систем достаточно малой толщины, соответственно, с достаточно сильным межслоевым взаимодействием. Эта микроскопическая модель аналогична использовавшейся в [1].

Выражение для транспроводимости получим, используя выражение для статсуммы, которая запишется в виде континуального интеграла по фермионным (грассмановым) полям  $\bar{\psi}_i(x), \psi_i(x)$ :

$$\mathcal{Z} = \int D(\bar{\psi}_1, \psi_1) D(\bar{\psi}_2, \psi_2) \times$$

$$e^{-\int_0^\beta d\tau \int dx \sum_{i=1,2} \bar{\psi}_i(x) [\partial_\tau + \hat{\xi}_i] \psi_i(x) + g \int_0^\beta d\tau \int dx \bar{\psi}_1(x) \bar{\psi}_2(x) \psi_2(x) \psi_1(x)}$$

где  $\hat{\xi}_i = \frac{[\hat{p} \mp \frac{e}{c} A_i(x)]^2}{2m_i} - \mu_i$ . Воспользуемся преобразованием Хаббарда - Стратановича в виде

$$e^{g \int_0^\beta \int dx \bar{L} L} = \int D(\bar{\Delta}, \Delta) e^{\int_0^\beta d\tau \int dx \left[ -\frac{|\Delta|^2}{g} + \bar{\Delta} L + \Delta \bar{L} \right]}$$

для того, чтобы расцепить часть гамильтониана, отвечающую за взаимодействие. Мы ввели новые бозонные поля  $\bar{\Delta}, \Delta$ , которые, как впоследствии выяснится, соответствуют двухчастичным возбуждениям в системе. После такого преобразования статсумма будет выражена через интеграл, который оказывается квадратичным по фермионным полям, взяв который, получим выражение для неё, в котором

имеются только бозонные поля  $\bar{\Delta}$ ,  $\Delta$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int D(\bar{\psi}_1, \psi_1) D(\bar{\psi}_2, \psi_2) D(\bar{\Delta}, \Delta) \times \\
& e^{-\int_0^\beta d\tau \int dx \left[ \sum_{i=1,2} \bar{\psi}_i(x) [\partial_\tau + \hat{\xi}_i] \psi_i(x) - \frac{|\Delta(x)|^2}{g} + \bar{\Delta}(x) \psi_2(x) \psi_1(x) + \Delta(x) \bar{\psi}_1(x) \bar{\psi}_2(x) \right]} \\
&= \int D(\bar{\psi}_1, \psi_1) D(\bar{\psi}_2, \psi_2) D(\bar{\Delta}, \Delta) e^{-\int_0^\beta d\tau \int dx \left[ \frac{|\Delta|^2}{g} + \Psi^\dagger \mathbf{G}^{-1} \Psi \right]} \\
&= - \int D(\bar{\Delta}, \Delta) e^{-\int_0^\beta d\tau \int dx \frac{|\Delta|^2}{g} + Tr \ln [\mathbf{G}^{-1}]},
\end{aligned}$$

где введены спиноры Намбу

$$\Psi^\dagger = (\bar{\psi}_1 \quad \psi_2), \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix},$$

а

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial_\tau + \hat{\xi}_1 & -\Delta(x) \\ -\bar{\Delta}(x) & \partial_\tau - \hat{\xi}_2 \end{bmatrix}.$$

Путём варьирования эффективного действия по  $\Delta$  можно получить уравнение самосогласования на параметр порядка в приближении среднего поля, считая его однородным в пространстве и мнимом времени, с учётом пространственной и временной однородности гамильтониана системы. По аналогии с теорией сверхпроводимости, разумно предположить, что имеется температура перехода от ненулевого среднеполевого значения  $|\Delta|$  к нулевому, которое будет решением уравнения самосогласования для более высоких температур.

Континуальный интеграл мы умеем вычислять только в том случае, когда он гауссов, поэтому далее разложим действие вплоть до 2 порядка по флуктуациям  $\Delta$  вокруг среднеполевого значения, что, с учётом малости постоянной Планка, будет давать основной вклад в термодинамические величины. Линейная по флуктуациям часть действия обратится в ноль, останется квадратичное по флуктуациям действие. Будем исследовать систему при температурах, больших критической. Тогда равновесный параметр порядка будет равен нулю.

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}_0^{-1} + \hat{\Delta},$$

где

$$\mathbf{G}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \partial_\tau + \hat{\xi}_1 & 0 \\ 0 & \partial_\tau - \hat{\xi}_2 \end{bmatrix}, \hat{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta(x) \\ -\bar{\Delta}(x) & 0 \end{bmatrix},$$

а  $\hat{\Delta}$  считаем малым.

$$Tr \ln [\mathbf{G}^{-1}] = Tr (\ln [\mathbf{G}_0^{-1}] + \ln [\mathbf{1} + \mathbf{G}_0 \hat{\Delta}]) = Tr \left( \ln [\mathbf{G}_0^{-1}] + \mathbf{G}_0 \hat{\Delta} - \frac{1}{2} \mathbf{G}_0 \hat{\Delta} \mathbf{G}_0 \hat{\Delta} + \dots \right).$$

Распишем последний член подробнее.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Tr (\mathbf{G}_0 \hat{\Delta} \mathbf{G}_0 \hat{\Delta}) &= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \\ & -\mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & -\Delta \\ -\bar{\Delta} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \\ & -\mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & -\Delta \\ -\bar{\Delta} & \end{bmatrix} = \\ \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} & \mathbf{G}_1 \Delta \\ -\mathbf{G}_2 \bar{\Delta} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & \mathbf{G}_1 \Delta \\ -\mathbf{G}_2 \bar{\Delta} & \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_1 \Delta \mathbf{G}_2 \bar{\Delta} & \\ & -\mathbf{G}_2 \bar{\Delta} \mathbf{G}_1 \Delta \end{bmatrix} = \\ - \int dx dy \bar{\Delta}(x) \underbrace{[\hat{G}_1(x, y) \hat{G}_2(y, x)]}_{\hat{M}(x, y)} \Delta(y), \end{aligned}$$

где интеграл берётся по пространственным координатам и по мнимому времени.

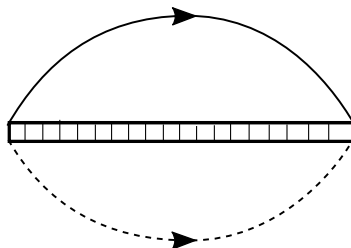
Выбор знака '-' перед  $\mathbf{G}_2$  соответствует  $G_2(\omega_m, q) = \frac{1}{-i\omega_m - \xi_2(-q)}$ , которая получается из

$$G_1(\omega_m, q) = \frac{1}{i\omega_m - \xi_1(q)} \text{ заменой } i\omega_m \rightarrow -i\omega_m, q \rightarrow -q, m_1 \rightarrow m_2.$$

Выражение для действия запишется так:

$$S_{eff} = \sum_p \bar{\Delta}(p) \left( \frac{1}{g} - \sum_q G_1(p) G_2(q-p) \right) \Delta(p)$$

В диаграммном виде действие (а точнее, его квадратичная часть, которая нас и интересует) представится в виде разности  $g^{-1}$  и петли, где сплошная направленная линия обозначает  $G_1(x, y)$ , а прерывистая направленная линия -  $G_2(x, y)$ , в которых функции Грина соответствуют операторам  $\pm \partial_\tau - \hat{\xi}_i$  при (пока ещё) ненулевых вектор-потенциалах  $A_1$  и  $A_2$ .



Квадратичное эффективное действие

### 3 Токовый коррелятор

Для вычисления транспроводимости сначала вычислим коррелятор  $\langle \hat{j}_1(\omega_1) \hat{j}_2(\omega_2) \rangle$ , а затем воспользуемся формулой Кубо. Исходя из исходного вида гамильтониана (1) можно заметить, что этот коррелятор равен

$\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}}{\delta A_1(q_1=0, \omega_1) \delta A_2(q_2=0, \omega_2)} \Big|_{A_{1,2}=0}$ . Будем вначале работать в  $(\mathbf{x}, \tau)$  - представлении, понимая под  $\mathbf{x}$  пару  $(\mathbf{x}, \tau)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}}{\delta A_1(x_1) \delta A_2(x_2)} &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int D(\bar{\Delta}, \Delta) \frac{\delta^2}{\delta A_1(x_1) \delta A_2(x_2)} \\ &\left( e^{-\int dx \int dy \left[ -\frac{|\Delta(x)|^2}{g} \delta(x-y) - \bar{\Delta}(x) \hat{M}(x, y) \Delta(y) \right]} \right) = \\ &\left\langle \left( \int dx \int dy \bar{\Delta}(x) \left[ \frac{\delta \hat{M}(x, y)}{\delta A_1(x_1)} \Big|_{A_{1,2}=0} \right] \Delta(y) \right) \left( \int dx \int dy \bar{\Delta}(x) \left[ \frac{\delta \hat{M}(x, y)}{\delta A_2(x_2)} \Big|_{A_{1,2}=0} \right] \Delta(y) \right) \right\rangle - \\ &\left\langle \int dx \int dy \bar{\Delta}(x) \left[ \frac{\delta^2 \hat{M}(x, y)}{\delta A_1(x_1) \delta A_2(x_2)} \Big|_{A_{1,2}=0} \right] \Delta(y) \right\rangle \end{aligned}$$

Видно, что вклад дают 2 члена, имеющих различную структуру.

Для вычисления вариационных производных  $\hat{M}$  используем уравнения на функции Грина.

$$\hat{L} \hat{G} = \hat{1}, \rightarrow \frac{\delta \hat{L}}{\delta A} \hat{G} + \hat{L} \frac{\delta \hat{G}}{\delta A} = 0, \rightarrow \frac{\delta \hat{G}}{\delta A} = -\hat{G} \frac{\delta \hat{L}}{\delta A} \hat{G}, \Rightarrow$$

$$\frac{\delta \hat{G}_1}{\delta A_1(x_1)} \Big|_{A_1=0} = \frac{e}{m_1 c} \hat{G}_1 \hat{p} \hat{G}_1,$$

$$\frac{\delta \hat{G}_2}{\delta A_2(x_2)} \Big|_{A_2=0} = \frac{e}{m_2 c} \hat{G}_2 \hat{p} \hat{G}_2,$$

$$\frac{\delta \hat{M}(x, y)}{\delta A_1(x_1)} \Big|_{A_{1,2}=0} = \frac{e}{m_1 c} \hat{G}_1(x, x_1) \hat{p}(x_1) \hat{G}_1(x_1, y) \hat{G}_2(y, x),$$

$$\frac{\delta \hat{M}(x, y)}{\delta A_2(x_2)} \Big|_{A_{1,2}=0} = \frac{e}{m_2 c} \hat{G}_1(x, y) \hat{G}_2(y, x_2) \hat{p}(x_2) \hat{G}_2(x_2, x),$$

$$\frac{\delta^2 \hat{M}(x, y)}{\delta A_1(x_1) \delta A_2(x_2)} \Big|_{A_{1,2}=0} = \frac{e^2}{m_1 m_2 c^2} [\hat{G}_1(x, x_1) \hat{p}(x_1) \hat{G}_1(x_1, y)] [\hat{G}_2(y, x_2) \hat{p}(x_2) \hat{G}_2(x_2, x)].$$

В последних равенствах  $\hat{G}_1$  и  $\hat{G}_2$  берутся при нулевых значениях вектор-потенциалов. На диаграммном языке 2 вклада в коррелятор будут иметь вид, показанный на рис.1.

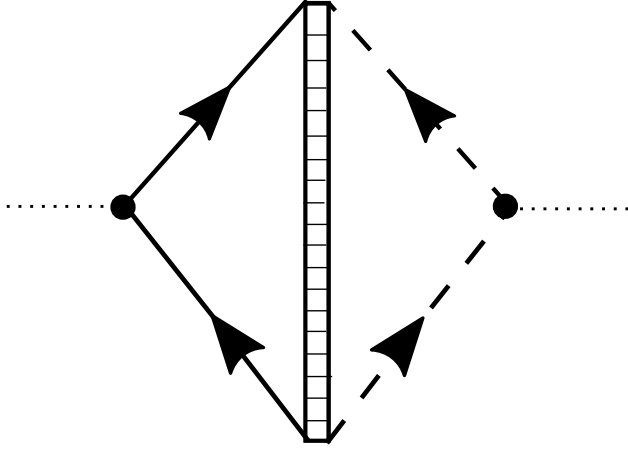


рис. 1а  
Вклад МТ

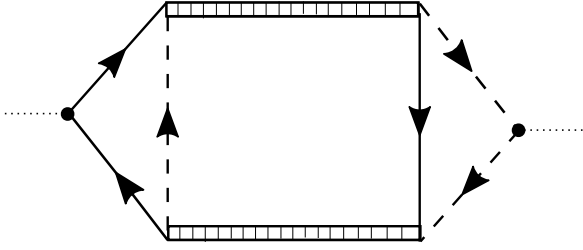


рис. 1б  
Вклад АЛ (1)

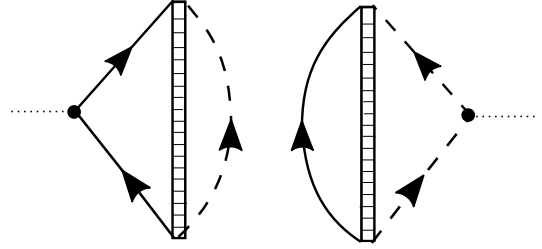


рис. 1в  
Вклад АЛ (2),  
который равен 0

Здесь жирная точка обозначает токовую вершину, в которой действует оператор импульса, а лестница - пропагатор  $\langle \bar{\Delta} \Delta \rangle$ . Разобравшись со структурой выражений, запишем их в импульсном представлении. Далее под  $p_i$  будем понимать  $(p, \Omega)$  с бозонными мацубаровскими частотами, а под  $q$  -  $(q, \omega)$  с фермионными мацубаровскими частотами.

Для первого вклада имеем:

$$\begin{aligned} & \left\langle \int dx \int dy \bar{\Delta}(x) \left[ \frac{\delta^2 \hat{M}(x, y)}{\delta A_1(p_1) \delta A_2(p_2)} \Big|_{A_{1,2}=0} \right] \Delta(y) \right\rangle = \\ & \int dz_1 \int dz_2 e^{-ip_1 z_1 + ip_2 z_2} \int dx \int dy \times \left\langle \sum_{p, p', q_1 - q_4} \bar{\Delta}(p) e^{-ipx} G_1(q_1) e^{iq_1 x - iq_1 z_1} q_2 \times \right. \\ & G_1(q_2) e^{iq_2 z_1 - iq_2 y} \Delta(p') e^{ip'y} G_2(q_3) e^{iq_3 y - iq_3 z_2} q_4 G_2(q_4) e^{iq_4 z_2 - iq_4 x} \left. \right\rangle = \left\langle \sum_{p, p', q_1 - q_4} \delta(p_1 - (q_1 - q_2)) \right. \\ & \delta(p - (q_1 - q_4)) \delta(p_2 - (q_4 - q_3)) \delta(p' - (q_3 - q_2)) \times \bar{\Delta}(p) G_1(q_1) q_2 G_1(q_2) \Delta(p') G_2(q_3) q_4 G_2(q_4) \left. \right\rangle = \\ & \sum_{q_2, q_4} \left\langle \bar{\Delta}((q_2 - q_4) + p_1) \Delta((q_2 - q_4) + p_2) \right\rangle G_1(q_2 + p) q_2 G_1(q_2) G_2(q_4 - p_2) q_4 G_2(q_4) \end{aligned}$$



Для второго, соответственно,

$$\left\langle \left( \int dx \int dy \bar{\Delta}(x) \left[ \frac{\delta \hat{M}(x, y)}{\delta A_1(p_1)} \Big|_{A_{1,2}=0} \right] \Delta(y) \right) \times \left( \int du \int dv \bar{\Delta}(u) \left[ \frac{\delta \hat{M}(u, v)}{\delta A_2(p_2)} \Big|_{A_{1,2}=0} \right] \Delta(v) \right) \right\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{q_1-4} \left( \bar{\Delta}((q_1 - q_2) + p_1) G_1(q_1 + p_1) q_1 G_1(q_1) \Delta(q_1 - q_2) G_2(q_2) \right) \times \right.$$

$$\left. \left( \bar{\Delta}(q_3 - q_4) G_1(q_3) \Delta((q_3 - q_4) + p_2) G_2(q_4 - p_2) q_4 G_2(q_4) \right) \right\rangle$$

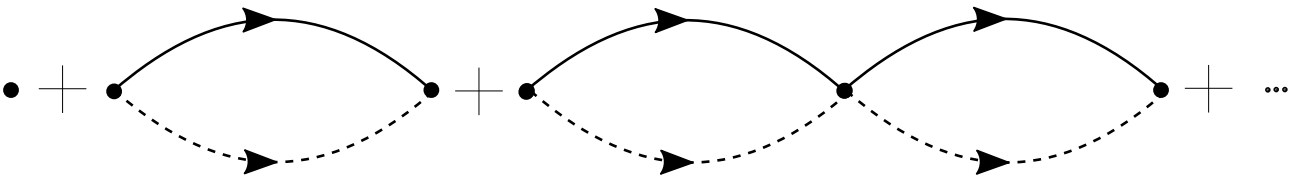
Во втором выражении  $\bar{\Delta}$  и  $\Delta$  можно спаривать двумя различными способами: внутри петли и между петлями. Получим, вообще говоря, две разные диаграммы. Но так как нам необходимо их вычислить при нулевом вектор-потенциале, несвязная диаграмма не будет давать вклада, так как она пропорциональна среднему импульсу (в квадрате), который равен нулю в отсутствие приложенного напряжения.

## 4 Флуктуационный пропагатор

Теперь найдём  $\langle \bar{\Delta}(p_1) \Delta(p_2) \rangle$ , после чего  $\langle \bar{\Delta}(p_1) \Delta(p_2) \bar{\Delta}(p_3) \Delta(p_4) \rangle$  будет легко найти по теореме Вика. По свойству гауссовых интегралов,

$$\langle \bar{\Delta}(p_1) \Delta(p_2) \rangle = \delta_{p_1, p_2} \frac{1}{\frac{1}{g} + M(p_1)}.$$

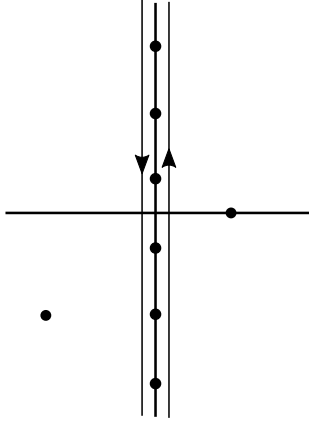
На диаграммном языке этот пропагатор представится как сумма всех "лестничных" диаграмм. Для него можно написать уравнение Бете-Сальпетера, но решать его нам не нужно, так как формула для пропагатора уже получена.



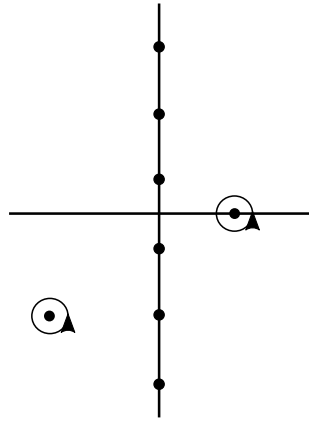
Диаграммное представление пропагатора

Найдём  $M(p)$ , выполнив суммирование по фермионным мацубаровским частотам при помощи интегрирования по замкнутому контуру в комплексной плоскости по контуру, обходящему мнимую ось в правильном направлении с функцией, имеющей полюса с единичными вычетами в точках, соответствующих фермионным мацубаровским частотам, которую можно взять такой:  $\frac{1}{2T} \text{th} \left( \frac{\omega}{2T} \right)$ . Воспользуемся сначала гриновскими функциями свободных частиц  $\left( \frac{1}{\mp i\omega_m - \frac{q^2}{2m_{1,2}} + \mu_{1,2}} \right)$ , не вводя пока никакого времени рассеяния, чтобы понять, какой вид имеет нужный нам пропагатор.

Для вычисления указанного интеграла раздвинем контур, унеся его на  $\infty$  (так как подинтегральная функция убывает как  $\frac{1}{|\omega|^2}$ ), после чего интеграл перенесётся на особенности исходной функции (которые для свободных гриновских функций являются полюсами). Потом разложим ответ, оставив только низшие степени  $p$  и  $\Omega$ .



Исходный контур



Обход полюсов

$$\begin{aligned}
 M(i\Omega_n, p) &= -T \sum_{\omega_{m,q}} G_1(i\omega_m + i\Omega_n, q + p) G_2(i\omega_m, q) = \\
 &= T \sum_{\omega_{m,q}} \frac{1}{i\omega_m + i\Omega_n + \frac{(q+p)^2}{2m_1} - \mu_1} \frac{1}{i\omega_m - \frac{q^2}{2m_2} + \mu_2} = \\
 &= \sum_q \frac{1}{2\pi i} \oint d\omega \underbrace{\left[ -\frac{1}{2} th\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right]}_f \frac{1}{\omega + i\Omega_n + \frac{(q+p)^2}{2m_1} - \mu_1} \frac{1}{\omega - \frac{q^2}{2m_2} + \mu_2} = -\sum_q \left( \begin{array}{c} \text{res } f \\ -\left(i\Omega_n + \frac{(q+p)^2}{2m_1} - \mu_1\right) \end{array} + \begin{array}{c} \text{res } f \\ \left(\frac{q^2}{2m_2} - \mu_2\right) \end{array} \right) \\
 &= \sum_q \frac{th\left(\frac{\frac{(q+p)^2}{2m_1} - \mu_1}{2T}\right) + th\left(\frac{\frac{q^2}{2m_2} - \mu_2}{2T}\right)}{2 \left[ i\Omega_n + \frac{(q+p)^2}{2m_1} - \mu_1 + \frac{q^2}{2m_2} - \mu_2 \right]}.
 \end{aligned}$$

Можно сделать сдвиг по импульсам, чтобы избавиться от зависимости от угла в знаменателе. Введём  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ ,  $M = m_1 + m_2$  и сделаем замену  $q \rightarrow q - \frac{pm}{m_2}$ , что эквивалентно представлению движения частиц как суперпозиции перемещения их центра масс и движения относительно него. После этого предыдущее вы-

ражение примет вид

$$\sum_q \left[ \frac{th \left( \frac{(q - \frac{pm}{m_2})^2}{2m_1} - \mu_1 \right) + th \left( \frac{(q + \frac{pm}{m_1})^2}{2m_2} - \mu_2 \right)}{2 \left[ i\Omega_n + \frac{q^2}{2m} - \mu_1 + \frac{p^2}{2M} - \mu_2 \right]} \right]$$

Этот интеграл имеет ультрафиолетовую расходимость в размерности 2 (и больше), что является следствием паталогичности исходного точечного потенциала взаимодействия между частицами. В теории БКШ эта расходимость устраняется путём учёта того, что взаимодействие между электронами (та его часть, которая отвечает за притяжение) осуществляется посредством фононов кристаллической решётки и поэтому имеет естественную границу - дебаевскую частоту. Поэтому этот потенциал притяжения естественно моделировать постоянным в пространстве импульсов потенциалом (таким же, как и точечный), но обрезанным на частоте Дебая по энергии. Поэтому в теории БКШ все интегралы подобного рода (например, возникающий в уравнении самосогласования) можно просто обрезать на дебаевской частоте.

В нашей же задаче наиболее естественным потенциалом взаимодействия дырок и электронов является кулоновский, который не имеет естественного масштаба обрезания (экранирование в тонкой пластинке никак не меняет эту ситуацию), поэтому так просто обрезать расходящиеся интегралы кажется необоснованным. Можно, однако, воспользоваться приёмом, который позволяет выразить параметр взаимодействия  $\frac{1}{g}$  через физически более осмысленную величину - радиус рассеяния частиц, взаимодействующих с соответствующим потенциалом, друг на друге в вакууме, для которого имеется формула

$$\frac{m}{4\pi a} = \frac{1}{g} + \sum_k \frac{1}{2\epsilon_k}$$

Так как нам нужно посчитать величину  $\frac{1}{g} + M(p)$ , где  $M(p)$  расходится как  $\sum_q \frac{1}{\frac{q^2}{2m}}$ , и эта ультрафиолетовая расходимость сократится с такой же от  $\frac{1}{g}$ . Правда,  $\sum_k \frac{1}{2\epsilon_k}$  имеет в нашей размерности 2 инфракрасную расходимость. Она связана с тем, что мы считаем нашу систему абсолютно двумерной, не учинывая малую, но конечную толщину проводящих пластинок. Эту расходимость мы устраним, обрезав суммирование на малом импульсе  $q_G$ , который связан с поперечными размерами пластин.

Теперь можем вычислить коррелятор. Будем считать  $p, \Omega$  и  $T$  малыми по сравнению с импульсом и энергией Ферми и вычислим с точностью до первого порядка

по  $p^2$  и  $\Omega$  соответствующий интеграл

$$M(p, i\Omega_n) - \sum_k \frac{1}{2\epsilon_k} = \sum_q \left[ \frac{th\left(\frac{(q+p)^2}{2m_1} - \mu_1\right) + th\left(\frac{q^2}{2m_2} - \mu_2\right)}{2\left[i\Omega_n + \frac{(q+p)^2}{2m_1} - \mu_1 + \frac{q^2}{2m_2} - \mu_2\right]} - \frac{1}{\frac{q^2}{2m}} \right].$$

С учётом интегрирования по углу

$$\left\langle th\left(\frac{(q-\frac{pm}{m_2})^2}{2m_1} - \mu_1\right) \right\rangle_\phi \approx \left\langle th\left(\frac{q^2}{2m_1} - \mu_1\right) + 2\delta\left(\frac{q^2}{2m_1} - \mu_1\right) \left(-\frac{\mathbf{pq}}{2MT} + \frac{p^2 m_1}{2M^2 \cdot 2T}\right) \right\rangle_\phi +$$

$$\delta'\left(\frac{q^2}{2m_1} - \mu_1\right) \left(\frac{\mathbf{pq}}{2MT}\right)^2 \Bigg\rangle_\phi = th\left(\frac{q^2}{2m_1} - \mu_1\right) + 2\delta\left(\frac{q^2}{2m_1} - \mu_1\right) \left(\frac{p^2 m_1}{2M^2 \cdot 2T}\right) + \delta'\left(\frac{q^2}{2m_1} - \mu_1\right) \left(\frac{(pq)^2}{8M^2 T^2}\right)$$

, и  $\delta\left(\frac{q^2}{2m_1} - \mu_1\right) = \frac{2m_1 T}{q_1} \delta(q - q_1)$ ,  $q_1 = \sqrt{2m_1 \mu_1}$ . Сначала положим  $T = 0$ , тогда  $th$  перейдёт в  $sign$ , и интеграл возьмётся точно. Затем можно будет учесть зависимость от  $T$ , в предположении, что  $|\mu_{1,2}| \gg T$ . Обозначим  $\tilde{\mu} = \mu_1 + \mu_2 - i\Omega_n - \frac{p^2}{2M}$ ,  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  для удобства. Далее будем считать, что  $q_1 < q_2$ .

$$\int \frac{qdq}{2\pi} \left[ \frac{sign\left(\frac{q^2}{2m_1} - \mu_1\right) + p^2 \left[ \frac{2m_1 T}{q_1} \delta(q - q_1) \frac{m_1}{2M^2 T} + \frac{2m_1 T}{q_1} \delta'(q - q_1) \frac{q^2}{8M^2 T^2} + (1 \leftrightarrow 2) \right]}{2\left[\frac{q^2}{2m} - \tilde{\mu}\right]} - \frac{1}{\frac{q^2}{2m}} \right] =$$

$$\frac{m}{2\pi} \left[ \left[ \ln \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu} - \frac{q_1^2}{2m}} + \ln \frac{\frac{q^2}{2m} - \tilde{\mu}}{\frac{q_2^2}{2m} - \tilde{\mu}} - \ln \frac{\frac{q^2}{2m}}{\frac{q_G^2}{2m}} \right] \Bigg|_{q=\infty} + \frac{p^2}{4\pi M^2} \left[ \frac{m_1^2}{\frac{q_1^2}{2m} - \mu} + \frac{1}{4T} \left[ \frac{m_1 q_1 \left(3\mu - \frac{q_1^2}{2m}\right)}{\left(\frac{q_1^2}{2m} - \mu\right)^2} \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right] \right]$$

$$= \frac{m}{2\pi} \left[ \left[ \ln \frac{\frac{q_G^2}{2m} \mu}{\left(\mu - \frac{q_1^2}{2m}\right) \left(\frac{q_2^2}{2m} - \mu\right)} - \left[ i\Omega_n + \frac{p^2}{2M} \right] \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu - \frac{q_1^2}{2m}} + \frac{1}{\frac{p_2^2}{2m} - \mu} \right] \right] + \right.$$

$$\left. \frac{p^2}{4\pi M^2} \left[ \frac{m_1^2}{\frac{q_1^2}{2m} - \mu} + \frac{1}{4T} \left[ \frac{m_1 q_1 \left(3\mu - \frac{q_1^2}{2m}\right)}{\left(\frac{q_1^2}{2m} - \mu\right)^2} \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right] \right]$$

Эти расчёты проведены для случая, когда  $\mu_{1,2} > 0$ , однако в этом случае они не дают возможности найти верную зависимость этого выражения от  $\Omega$ , так как знаменатель подинтегрального выражения имеет нулевую действительную часть

в точке  $\frac{q^2}{2m} = \mu$  при малой мнимой части ( $i\Omega_n$ ), что приводит к наличию члена, пропорционального  $|\Omega_n|$ , который, как мы увидим, намного больше члена перед  $i\Omega_n$  и, соответственно, является намного более важным для случая  $\mu > 0$ . Сложность вычисления этого вклада при таком подходе состоит в том, что в нашем случае нельзя воспользоваться общеизвестной формулой  $\frac{1}{x - i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$  ( $\mathcal{P}$  здесь соответствует взятию интеграла в смысле главного значения), так как в точке нуля действительной части знаменателя числитель также очень мал (и даже обращается в ноль при наличии соответствия между ферми-поверхностями фермионных газов ( $m_1\mu_1 = m_2\mu_2$ )). Для его вычисления поступим иначе, и позже вычислим пропагатор другим способом, учтя также наличие времён рассеяния в  $G_1, G_2$ .

Химический потенциал, однако может быть и отрицательным. В этом случае вычисления упрощаются, так как знаменатель нигде не обращается в ноль. Здесь в ответ входит уже только член, пропорциональный  $i\Omega_n$ . Формула для  $M$  такова:

$$\int \frac{qdq}{2\pi} \left[ \frac{1}{\frac{q^2}{2m} + |\mu| + \left(i\Omega_n + \frac{p^2}{2M}\right)} - \frac{1}{\frac{q^2}{2m}} \right] = \frac{m}{2\pi} \left[ \ln \frac{q_G^2}{2|\mu|m} - \frac{1}{|\mu|} \left[ i\Omega_n + \frac{p^2}{2M} \right] \right]$$

Видно, что в этом случае пропагатор принимает вид, характерный для свободного бозона с массой  $M$ .

Зависимость от температуры коэффициента нулевого порядка при малых температурах в случае положительных химпотенциалов кажется слабой, но именно она определяет критическую температуру, при которой он обращается в ноль и, соответственно, имеется полюс нашего двухчастичного пропагатора при нулевых импульсе и частоте. Так как в этой работе не ставится задача определения критической температуры, нам нет необходимости знать точный вид этого члена, но необходимо знать характер его стремления к нулю при подходе к критической температуре, а также его зависимость при высоких температурах. Эти зависимости пригодятся нам, когда мы будем изучать температурную зависимость транспроводимости.

Температурная зависимость коэффициента нулевого порядка легко восстанавливается при учёте зависимости  $th\left(\frac{\xi_i}{2T}\right) \approx 1 - 2e^{-\frac{\xi_i}{T}}$  от температуры при больших аргументах, а именно экспоненциально малой поправки к нему, так как интеграл от выражения, стоящего при нём, имеет, как мы помним, ультрафиолетовую расходимость. Получается, что при больших температурах этот коэффициент пропорционален логарифму температуры (в лидирующем порядке), потому что в этом случае наличие слабо спадающей экспоненты действует на логарифмически расходящийся интеграл просто как параметр обрезания. Это можно показать более строго, учтя, что для такого интеграла, обрезанного вблизи  $\xi = 0$  (весма

похожего на полученный выше)

$$I = \int_a^{\infty} \frac{e^{-\frac{b}{T}|\xi|}}{\xi} d\xi$$

верно

$$\frac{\partial I}{\partial T} = \frac{b}{T^2} \int_a^{\infty} e^{-\frac{b}{T}|\xi|} d\xi \approx \frac{2}{T},$$

что получается при учёте того, что в нашем интеграле  $a$  отрицательный и большой по модулю относительно температуры. А при совсем малой температуре коэффициент имеет линейную зависимость от неё, так как функция, стоящая при гиперболическом тангенсе, не успевает значительно измениться на масштабе спада экспоненты. В целом, искомый коэффициент должен достаточно неплохо аппроксимироваться формулой  $\frac{m}{2\pi} \ln\left(\frac{T}{T_c}\right)$  после сложения с  $\frac{1}{g}$ , что согласуется с [3].

Теперь приступим к вычислению пропагатора при положительных химпотенциалах, учтя рассеяние электронов/дырок на примесях, фононах, на других электронах/дырках, феноменологически введя времена рассеяния (а точнее, scattering rates  $\gamma_i$ ) для частиц каждого сорта. Функции Грина будем использовать такие:

$$G_{1,2} = \frac{1}{\mp(i\omega_m + \gamma_i \operatorname{sgn}(\omega_m)) - \frac{q^2}{2m_{1,2}} + \mu_{1,2}}$$

Теперь вычислим  $M(p)$ , сначала произведя интегрирование по импульсам, а затем просуммировав по частотам. Как обычно, будем интересоваться малыми импульсами и частотами, сохраняя в получившихся интегралах только линейные по частоте и квадратичные по импульсу слагаемые. Теперь (конечно, при положительных химпотенциалах) будем интегрировать по импульсу не от нуля, а от  $-\infty$ , что позволит нам взять необходимые интегралы путём деформации контура интегрирования в комплексной плоскости и унесения контура на бесконечность, а затем произвести суммирование по импульсам в явном виде. Это можно делать, так как рассматриваются реалистичные температуры, существенно меньшие химических потенциалов. Такое приближение внесёт в результат ошибку порядка  $\frac{T}{\mu}$ . Также оно не позволит нам увидеть член, пропорциональный  $i\Omega_n$  по причине его относительной малости по параметру  $\frac{T}{\mu}$ . Нас, однако, в этой работе он не интересует, так как мы не рассматриваем переходный между положительными и отрицательными химпотенциалами режим, и один из вкладов оказывается явно больше второго.

Введём обозначения  $\varepsilon_1 = \omega_m + \Omega_n + \gamma_1 \operatorname{sgn}(\omega_m + \Omega_n)$ ,  $\varepsilon_2 = \omega_m + \gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega_m)$ . Эти величины (их мнимая часть) имеют тот же знак, что и частоты, в них входящие.

А так как фермионные частоты не равны нулю, то  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  имеют определённый знак.

$$\frac{1}{i\varepsilon_1 - \xi_1(p+q)} = \frac{1}{i\varepsilon_1 - \xi_1(q)} + \frac{p^2}{2m_1} \left( \frac{1}{[i\varepsilon_1 - \xi_1(q)]^2} + \frac{q^2}{2m_1 [i\varepsilon_1 - \xi_1(q)]^3} \right) =$$

$$\frac{1}{i\varepsilon_1 - \xi_1(q)} + \frac{p^2}{2m_1} \left( \frac{3}{[i\varepsilon_1 - \xi_1(q)]^2} + \frac{2\mu_1 + 2i\varepsilon_1}{[i\varepsilon_1 - \xi_1(q)]^3} \right),$$

где во втором слагаемом можно пренебречь  $i\varepsilon_1$  по сравнению с  $\xi$ , так как из размерных соображений после суммирования отношение этих членов будет порядка  $\frac{T}{E_f} \ll 1$ , а мы уже имеем ошибку этого порядка, так как интегрируем по  $q^2$  от

$-\infty$ . С этой точностью при  $p^2$  останется только  $\frac{2\mu_1}{[i\varepsilon_1 - \xi_1(q)]^3}$ .

Теперь возьмём входящие в это выражение рациональные интегралы. Соответствующие функции в комплексной плоскости имеют по 2 полюса, которые, в силу знакоопределённости  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  расположены сверху или снизу от действительной оси. Если оба они находятся по одну сторону от неё, то деформируя контур в другую сторону от неё и унося его на  $\infty$ , получим, что интеграл равен 0. В обратном случае деформируем контур в сторону полюса с мнимой частью  $\varepsilon_2$ , в результате чего получим формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qdq}{2\pi} \frac{1}{[i\varepsilon_1 - \xi_1(q)]^k} \frac{1}{i\varepsilon_1 + \xi_2(q)} = 2\pi i m_1^k m_2 \theta(\omega_m(\omega_m + \Omega_n)) \operatorname{sgn}(\omega_m) (k-1)! \times$$

$$\frac{1}{[i(m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2) + m_1\mu_1 - m_2\mu_2]^k} \cdot$$

$$\sum_{\omega_m} \frac{\theta(\omega_m(\omega_m + \Omega_n)) \operatorname{sgn}(\omega_m)}{[i(m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2) + m_1\mu_1 - m_2\mu_2]^k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi MT)^k}$$

$$\left( \frac{1}{[\frac{1}{2} + n + \frac{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2}{2\pi MT} + \frac{m_1|\Omega_n|}{2\pi MT} - \operatorname{sgn}(\Omega_n) i \frac{m_1\mu_1 - m_2\mu_2}{2\pi MT}]^k} + (1 \leftrightarrow 2) \right)$$

Суммируя по частотам подобные дроби, получаем

$$\frac{(-1)^k}{(k-1)!(2\pi MT)^k} \left( \Psi^{(k-1)} \left( \frac{1}{2} + \frac{m_1}{2\pi MT} |\Omega| + \frac{\gamma}{2\pi T} - i \operatorname{sgn}(\Omega_n) \frac{\delta}{2\pi T} \right) + \right.$$

$$\left. \Psi^{(k-1)} \left( \frac{1}{2} + \frac{m_2}{2\pi MT} |\Omega| + \frac{\gamma}{2\pi T} + i \operatorname{sgn}(\Omega_n) \frac{\delta}{2\pi T} \right) \right),$$

где

$$\gamma = \frac{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2}{M},$$

$$\delta = \frac{m_1\mu_1 - m_2\mu_2}{M},$$

а  $\Psi(\dots)$  - дигамма функция.

Нулевой член в таком подходе, естественно, логарифмически расходится. Но нас это не волнует, так как его регуляризацию мы уже провели.

$$\begin{aligned} M(i\Omega_n, p) &= \frac{m}{2\pi} \ln\left(\frac{T}{T_c}\right) + T \sum_{\omega_m} 2\pi i m_1 m_2 \theta(\omega_m(\omega_m + \Omega_n)) \text{sgn}(\omega_m) \\ &\quad \left( -i|\Omega_n| \frac{1}{[i(m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2) + m_1\mu_1 - m_2\mu_2]^2} + \frac{p^2}{2m_1} \frac{m_1^2\mu_1}{[i(m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2) + m_1\mu_1 - m_2\mu_2]^3} \right) \\ &= \frac{m}{2\pi} \left( \ln\left(\frac{T}{T_c}\right) + \frac{|\Omega_n|}{4\pi T} \left( \frac{m_1}{M} \Psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\pi T} - i \text{sgn}(\Omega_n) \frac{\delta}{2\pi T}\right) + \frac{m_2}{M} \Psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\pi T} + i \text{sgn}(\Omega_n) \frac{\delta}{2\pi T}\right) \right) \right) - \\ &\quad p^2 \frac{(\mu_1 m_1) m_1 m_2}{M^3 \cdot 2(2\pi)^3 T^2} \left( \Psi''\left(\frac{1}{2} + \frac{m_1}{2\pi M T} |\Omega| + \frac{\gamma}{2\pi T} - i \text{sgn}(\Omega_n) \frac{\delta}{2\pi T}\right) + \right. \\ &\quad \left. \Psi''\left(\frac{1}{2} + \frac{m_2}{2\pi M T} |\Omega| + \frac{\gamma}{2\pi T} + i \text{sgn}(\Omega_n) \frac{\delta}{2\pi T}\right) \right). \end{aligned}$$

Можно заметить, что при  $\delta \neq 0$ , что соответствует дисбалансу между плотностями носителей заряда в разных слоях, полюс флуктуационного пропагатора имеет мнимую часть. Это значит, что возбуждения имеют в этом случае конечное время жизни.

Далее рассмотрим случай  $\delta = 0$ , для которого и проведём вычисление проводимости. Он соответствует максимальному коэффициенту диффузии (в БКШ - режиме) и максимальному времени жизни возбуждений. Он представляет интерес ещё потому, что допускает образование экситонного конденсата (в ВЕС - режиме) при достаточно низких температурах. Совпадение плотностей дырок и электронов при изготовлении полупроводниковых двухслойных систем было достигнуто экспериментально [9]. Таким образом,

$$\langle \overline{\Delta(i\Omega_n, p)} \Delta(i\Omega_n, p) \rangle = \frac{1}{a + Dp^2 + \gamma_c |\Omega_n|},$$

где выражения для коэффициентов таковы:

$$a = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{T}{T_c},$$

$$D = -\frac{(\mu_1 m_1) m_1 m_2}{M^3 \cdot 2(2\pi)^3 T^2} \left( \Psi''\left(\frac{1}{2} + \frac{m_1}{2\pi M T} |\Omega| + \frac{\gamma}{2\pi T}\right) + \Psi''\left(\frac{1}{2} + \frac{m_2}{2\pi M T} |\Omega| + \frac{\gamma}{2\pi T}\right) \right)$$

$$\gamma_c = \frac{m}{2\pi \cdot 2\pi T} \Psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\pi T}\right)$$

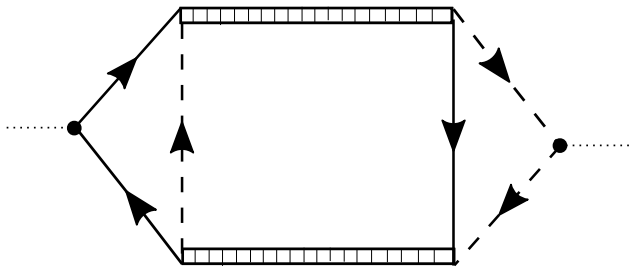
Видно, что в системе есть два режима, соответствующих различному поведению двухчастичных возбуждений. В том из них, который соответствует отрицательным химпотенциалам фермионных газов, возбуждения ведут себя как свободные бозоны. Это легко интерпретировать качественно: при достаточно сильном



притяжении пара фермионов образует экситон много меньшего размера, чем среднее расстояние между частицами, а, как известно, экситон можно считать бозоном в пределе малых концентраций. Это называется режимом бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК-режим). Второй режим соответствует относительно слабому взаимодействию и напоминает то, что происходит в теории БКШ (режим БКШ). В этом случае возбуждения имеют диффузионный характер. При этом, в полном согласии с [7], в ВЕС-режиме химический потенциал ферми-газов сильно отличается от энергий Ферми - становится отрицательным (и уходит на  $-\infty$ ).

Теперь можно перейти непосредственно к вычислению транспроводимости.

## 5 Вклад Асламазова-Ларкина



АЛ

Диаграмма АЛ состоит из двух треугольников, состоящих из функций Грина и имеющих по токовой вершине каждый, которые связаны между собой двумя пропагаторами. Для вычисления всей диаграммы логично сначала вычислить треугольники, а затем свернуть их с пропагаторами. Так как нас интересует статическая и однородная транспроводимость, то нужно знать токовый коррелятор на малых частотах и импульсах, то есть можно ограничиться вычислением линейного по частоте члена в корреляторе (так как потом придётся делить его на частоту) при нулевом импульсе. Далее будем производить расчёты в области температур, близких к критической - там, где пропагаторы сильно зависят от частоты, а треугольники - относительно слабо. Обозначим треугольники как

$$B_{1,2}(p, \Omega_n) = \mp \sum_{\omega_m, q} G_{1,2}(q, \omega_m) q G_{1,2}(q, \omega_m) G_{2,1}(p - q, \Omega_n - \omega_m)$$

и вычислим их на нулевой частоте. Для этого заметим сначала, что

$$\frac{p}{\pm i\omega_m - \xi_{1,2}(p)} = \frac{1}{m_{1,2}} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\pm i\omega_m - \xi_{1,2}(p + q)} \Big|_{q=0},$$

поэтому треугольники оказываются равными производным по  $p$  от уже вычисленной  $M(i\Omega_n, p)$ . Получим выражения

$$B_{1,2}(p, 0) = 2Dm_{1,2}p.$$

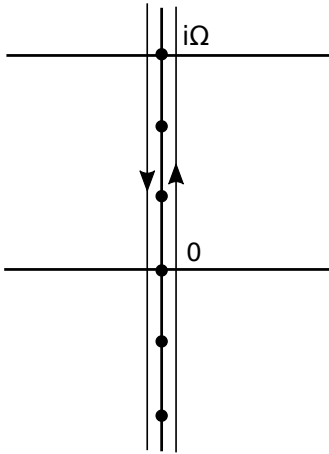
Теперь можно записать итоговое выражение для токового коррелятора, где пропагатор  $\langle \bar{\Delta} \Delta \rangle(i\Omega_n, p)$  обозначен как  $\Gamma(i\Omega_n, p)$ .

$$\langle J_1 J_2 \rangle(i\Omega_n, 0) \approx \frac{e^2}{m_1 m_2} \times \sum_{\Omega_k, p} B_1(p, 0) B_2(p, 0) \Gamma(i\Omega_k, p) \Gamma(-i\Omega_n + i\Omega_k, p)$$

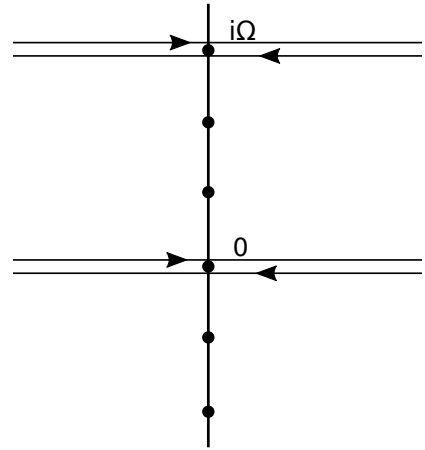
Вычислим сначала сумму по мацубаровским частотам пропагаторов. Будем, как обычно, интересоваться её видом на малых частотах. После суммирования помимо линейного по частоте члена возникнет ещё член нулевого порядка, который соответствует аномальному диамагнетизму, который должен отсутствовать выше критической температуры. Поэтому, надеясь на то, что он сократится с вкладом от других диаграмм, не будем принимать его во внимание.

$$T \sum_{\Omega_k} \Gamma(i\Omega_k, p) \Gamma(i\Omega_k - i\Omega_n, p) = \oint d\Omega \frac{1}{4\pi i} \text{cth} \left( \frac{\Omega}{2T} \right) f(\Omega),$$

где  $f(\Omega)$  - аналитическое продолжение  $\Gamma(i\Omega_k, p) \Gamma(i\Omega_k - i\Omega_n, p)$  с точек мнимой



Исходный контур



Контур после переноса на разрезы

оси, соответствующих бозонным мацубаровским частотам, на всю комплексную плоскость, а контур обходит мнимую ось в правильном направлении. В силу неаналитичности  $\Gamma(i\Omega_n, p) = \frac{1}{a + Dp^2 + \gamma_c |\Omega_n|}$  (имеет разрез на  $Im \Omega = 0$ )  $f(\Omega)$  имеет уже два разреза, расположенных на  $Im \Omega = 0$  и  $Im \Omega = \Omega_n$ . Исходный контур интегрирования можно перенести на разрезы этой функции, в результате чего свёртка пропагаторов запишется в виде (далее будем проводить вычисления для  $\Omega_n \geq 0$ )

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{1}{4\pi i} \text{cth} \left( \frac{\Omega}{2T} \right) \left[ \left( \frac{1}{\epsilon_p - i\gamma_c \Omega} - \frac{1}{\epsilon_p + i\gamma_c \Omega} \right) \frac{1}{\epsilon_p + \gamma_c \Omega_n + i\gamma_c \Omega} + \left( \frac{1}{\epsilon_p - i\gamma_c \Omega - \gamma_c \Omega_n} - \frac{1}{\epsilon_p + i\gamma_c \Omega + \gamma_c \Omega_n} \right) \frac{1}{\epsilon_p - i\gamma_c \Omega} \right].$$

Сдвигом по частоте можно привести интеграл к такому виду (сделав замену  $\Omega \rightarrow \Omega - i\Omega_n$  во второй дроби)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{1}{4\pi i} \text{cth}\left(\frac{\Omega}{2T}\right) \frac{2i\gamma_c \Omega}{\varepsilon_p^2 + \gamma_c^2 \Omega^2} \frac{2\varepsilon_p + 2\gamma_c \Omega_n}{(\varepsilon_p + \gamma_c \Omega_n)^2 + \gamma_c^2 \Omega^2}$$

Далее оставим только линейную по  $\Omega_n$  часть, для чего возьмём производную от получившегося выражения по  $\Omega_n$ . Затем возьмём интеграл, заменив  $\text{cth}\left(\frac{\Omega}{2T}\right)$  на  $\frac{2T}{\Omega}$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{2T}{\pi} \left[ \frac{\gamma_c^2}{(\varepsilon_p^2 + \gamma_c^2 \Omega^2)^2} - \frac{2\varepsilon_p^2 \gamma_c^2}{(\varepsilon_p^2 + \gamma_c^2 \Omega^2)^3} \right] = \frac{2T\gamma_c}{\varepsilon_p^3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2 \cdot 3\pi}{8} \right) = -\frac{T\gamma_c}{2\varepsilon_p^3}$$

Теперь возьмём оставшийся интеграл по импульсам.

$$\int_0^{\infty} \frac{p dp}{2\pi} \frac{p^2}{(a + Dp^2)^3} = \frac{1}{4\pi D} \int_0^{\infty} dx \left[ \frac{1}{(a + Dx)^2} - \frac{a}{(a + Dx)^3} \right] = \frac{1}{4\pi D^2 a} \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{8\pi D^2 a}$$

Теперь можно получить конечную формулу для вклада Асламазова-Ларкина в проводимость в режиме БКШ.

$$\sigma_{AL} = \frac{1}{\Omega} \langle J_1 J_2 \rangle (\Omega) = \frac{e^2}{m_1 m_2} (2Dm_1)(2Dm_2) \left( -\frac{T\gamma_c}{2} \right) \frac{1}{8\pi D^2 a} = -\frac{e^2 T\gamma_c}{4\pi a}$$

Используя явные выражения для  $a$  и  $\gamma_c$ , получим, что вблизи критической температуры имеется расходимость  $\sim \frac{1}{T - T_c}$ . А на высоких температурах вклад убывает как  $\frac{1}{\ln T}$ .

## 6 Заключение

В работе полностью изложена микроскопическая теория эффекта кулоновского увлечения, выведенная из гамильтониана двухслойной электрон-дырочной системы. Показано, что описание эффекта можно получить, рассматривая двухчастичные возбуждения в системе. Построена эффективная бозонная теория, описывающая систему для температур, больших критической, из которой получено диаграммное представление для транспроводимости. Также был исследован флуктуационный пропагатор, играющий центральную роль во всей теории. Показано, что имеется два разных режима поведения возбуждений: БЭК- и БКШ-режимы. Также был вычислен вклад Асламазова-Ларкина в транспроводимость в БКШ-режиме.

Аналитическое выражение для двухчастичного пропагатора в случае несоответствия между электронной и дырочной плотностями, полученное в работе, по-видимому, является новым результатом, поскольку оно не было приведено в работах на данную тему, хотя исследования влияния несоответствия плотностей на поведение системы проводились [10].

Для полного понимания эффекта кулоновского увлечения в дальнейшем необходимо также вычислить вклад Маки-Томпсона в БКШ-режиме и оба вклада в БЭК-режиме, после чего стоит разобраться с тем, как меняются найденные величины в кроссовере, а не только в предельных случаях. Также было бы полезно выяснить, каким образом зависят от температуры  $\gamma_i$ , и какой из процессов рассеяния даёт наибольший вклад в эти параметры. Отдельного исследования требует поведение системы для температур, меньших критической. Все эти вопросы я планирую исследовать в дальнейшем.

## Список литературы

- [1] E.Taylor, A.Griffin, N.Fukushima and Y.Ohashi, Phys. Rev. A 74, 063626 (2006) (pairing fluctuations and superfluid density through the BCS-BEC crossover)
- [2] Ларкин А., Варламов А., Флуктуационные эффекты в сверхпроводниках (Москва, 2005).
- [3] D.K.Efimkin, Yu.E.Lozovik, Phys.Rev.B 88, 235420 (2013)
- [4] Alex Kamenev and Yuval Oreg, Phys.Rev.B 52(10) 7516 (Received 1995)
- [5] Giovanni Vignale, A.H.MacDonald, Phys.Rev.Lett. 76(15) 2786 (Received 1995) (Drag in Electron-Hole Layers)
- [6] I.V.Gorniy, A.G.Yashechkin, and D.V Kveshchenko, Phys.Rev.Lett. 83(1) 152 (Received 1999) (Coulomb Drag in Double Layers with Correlated Disorder)
- [7] Shunji Tsuchiya, Ryota Watanabe, and Yoji Ohashi, Phys.Rev.A 80, 033613 (2009) (Single-particle properties and pseudogap effects in the BCS-BEC crossover regime of an ultracold Fermi gas above  $T_c$ )
- [8] Ben Yu-Kuang Hu, Phys.Rev.Lett. 85(4) 820 (Received 1999)
- [9] J. A. Seamons, D. R. Tibbetts, J. L. Reno, and M. P. Lilly, arXiv:cond-mat/0611220v1 (2008) ()
- [10] P. Pieri, D. Neilson, and G.C. Strinati arXiv:cond-mat/0610311v1 (Effects of density imbalance on the BCS-BEC crossover in semiconductor electron-hole bilayers)
- [11] A.Atland and B.Simons, Condensed Matter Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [12] Henk T.C. Stoof, Koos B.Gubbles, Dennis B.M.Dickersheid, Ultracold Quantum Fields (Springer)
- [13] Gerald D.Mahan, Many-Particle Physics (Plenum Publishers, New York, 2000)