

Задачи к курсу "Элементы космологии". Баллы очень условно соответствуют сложности.

Баллы за 1.2 - 1.4, 3.1 - 3.3, 3.5 "сгорят" в первую очередь.

Ориентировочно: 4.1-4.5, 4.11 действуют до лекции 3 или 4

3.4 после л.3 уценится до 3 баллов.

До начала марта, скорее всего, действуют баллы за задачи 5.10 - 5.14.

Задачи 6.1, 6.3, 6.4, ??, 6.8 – до лекции 7. Задачи 6.2, 6.9 уцениваются до 1 балла.

1 Введение. Иерархическая структура, Хаббловское расширение. Классическая (Ньютоновская) модель расширяющейся Вселенной.

1.1 Скопление Девы находится на расстоянии 20 Мрс от нас, его размер порядка 5 Мрс, в нем около 200 галактик (не считая карликовых). Плотность галактик в центре 500 Мрс^{-3} . Оценить (снизу) освещенность поверхности в центре скопления Девы. (3 балла)

1.2 Оценить границы применимости Хаббловской формулы (на больших расстояниях) (1 балл)

1.3 На каком расстоянии хаббловская скорость становится порядка скоростей звезд в нашей Галактике (200 км/с)? (1 балл)

1.4 Расширяющийся однородный шар: Решить уравнения движения для случаев $E < 0$ и $E > 0$. (Качественную картинку решений мы уже нарисовали.) (3 балла)

1.5 Как именно измерить расстояние до рассеянного звездного скопления Гиады? Пусть у двух (хватит ли этого?) звезд известны лучевая и угловая поперечная скорости (+известно угловое расстояние между ними). Известно, что они движутся параллельно друг другу с одинаковой скоростью. Найти расстояние до них. (3 балла)

2 Изометрии. Космологический принцип.

2.1 Найти скалярные функции, форминвариантные относительно преобразования

а) $x \rightarrow x^2$, $d = 1$

б) $x' = y$, $y' = x$, $d = 2$

в) $x'^i = kx^i$, $d = 3$ (3 балла)

(обсуждаем "физически разумные" функции)

2.2 Двумерные человечки живут на поверхности воздушного шара (2-мерной сфере). Шарик можно надувать или сдувать. Напишите метрику для этих человечков (в любых координатах). (1 балл)

2.3 Найдите координаты, в которых метрика из предыдущей задачи имеет вид Робертсона-Уокера. (2 балла)

2.4 То же, что в задаче 2.2, для трехмерных человечков на трехмерной сфере, вложенной в 4-мерное пространство: $\mathbf{S}^3 \in \mathbf{R}^4, x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2(t)$. (1 балл)

2.5 Показать, что метрика Робертсона-Уокера описывает трехмерную сферу / псевдосферу. (3 балла)

2.6 Показать, что метрика Робертсона-Уокера (форм)инвариантна относительно вращений системы координат.(1 балл)

2.7 Показать, что метрика РУ инвариантна относительно преобразования квазитрансляции:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a} \left\{ \sqrt{1 - kx^2} + \left(1 - \sqrt{1 - ka^2}\right) \frac{x \cdot a}{a^2} \right\} \quad (1)$$

при $k = 0$. (1 балл)

2.8 Показать, что метрика РУ инвариантна относительно преобразования квазитрансляции (1) при $k \neq 0$. (5 баллов)

2.9 (Подсказка к 2.8) Для одномерного пространства постоянной положительной кривизны написать метрику в виде РУ. Найти преобразование квазитрансляции в этих координатах. (3 балла)

2.10 Найти преобразование, обратное квазитрансляции (1) (1 балл)

2.11 Показать, что линии $\mathbf{x} = const$ - геодезические в метрике РУ. (1 балл)

2.12 Вектор Киллинга – это вектор, задающий инфинитезимальную изометрию

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}(x), \quad \varepsilon \ll 1$$

Из форминвариантности метрики получить условие на вектор Киллинга:

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$$

(1 балл)

2.13 Найти векторы Киллинга, соответствующие вращениям в плоском 3-мерном пространстве. (1 балл)

2.14 Найти все векторы Киллинга на плоскости. (1 балл)

2.15 Найти векторы Киллинга, соответствующие квазитрансляциям в метрике Робертсона-Уокера. (1 балл)

2.16 Убедиться, что трехмерное векторное поле, форминвариантное относительно всех изометрий, равно нулю. (3 балла)

3 Распространение света в метрике Робертсона-Уокера

3.1 В момент космологического времени t_0 мы получаем световой сигнал, излученный из некоторой галактики в момент t_1 на частоте ν_1 . Найти красное смещение принятого сигнала. (Метрика РУ.) (3 балла)

3.2 Некто вычислил расстояние до далекой галактики по наблюдаемому угловому диаметру (предполагается, что истинный диаметр галактики ему известен). Он использовал классические формулы для расчета. Как выражается вычисленное им расстояние через координату галактики в метрике РУ, кривизну и масштабный фактор? (3 балла)

3.3 Некто вычислил расстояние до далекой галактики по наблюдаемой светимости "стандартной свечи" (звезды с известной абсолютной светимостью). Он использовал классические формулы для расчета. В терминах метрики РУ - какую величину он вычислил? (3 балла)

3.4 Некто вычислил расстояние до далекой галактики по наблюдаемым периоду и светимости цефеиды, пользуясь классическими формулами для расчета. В терминах метрики РУ - какую, собственно, величину он вычислил? Считать что абсолютная светимость цефеиды пропорциональна ее периоду в степени \varkappa : $L = CP^\varkappa$. (5 баллов)

3.5 Дано разложение масштабного фактора в ряд до второго порядка по $t - t_0$:

$$R(t) = R(t_0) \left(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \right)$$

где $H_0 = \frac{\dot{R}}{R}(t_0)$, $q_0 = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}(t_0)$. Выразить координату r источника света через красное смещение - написать разложение до второго порядка по z . (3 балла)

4 Решения уравнений Эйнштейна при разных уравнениях состояния

4.1 Исследовать эволюцию плоской вселенной с уравнением состояния $p = -\rho$ (модель де Ситтера). Получить зависимость масштабного фактора и постоянной Хаббла от времени. (1 балл)

4.2 Показать, что пространство-время де Ситтера - максимально симметричное. Найти все изометрии. (3 балла)

4.3 Исследовать эволюцию плоской вселенной, заполненной двумя фракциями: с уравнением состояния $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ (темная энергия) и $p_m = 0$ (пылевидная материя). Нарисовать (качественный) график зависимости масштабного фактора от времени. (3 балла)

4.4 То же, что в 4.3, для замкнутой Вселенной $k = +1$. (Возможны разные случаи!) (5 баллов)

4.5 Предположим, что мы живем в плоской Вселенной из задачи 4.3. Тогда из наблюдений известно, что плотность темной энергии в настоящее время в 2.3 раза больше плотности материи. Найдите z , соответствующее точке перегиба на графике $R(t)$ (3 балла)

4.6 Исследовать эволюцию плоской вселенной, заполненной фантомной энергией - темной энергией с уравнением состояния $p = -\alpha\rho$, $\alpha > 1$ Нарисовать график зависимости масштабного фактора от времени. (3 балла)

4.7 Исследовать эволюцию плоской вселенной с уравнением состояния $p = \rho^2$. Нарисовать график зависимости масштабного фактора от времени. (3 балла)

4.8 Исследовать эволюцию плоской вселенной с уравнением состояния $p = \sqrt{\rho}$. Нарисовать график зависимости масштабного фактора от времени.

Следующие задачи используют понятие $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$, - отношение плотности i -ой фракции (например, материи) к критической плотности $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$. Если индекс у Ω отсутствует, подразумевается суммарная относительная плотность всех фракций. Часто пользуются диаграммой "состояния вселенной", на которой по оси абсцисс откладывается Ω_m , а по оси ординат - Ω_Λ .

4.9 Как зависит $\Omega(t)$ в плоской материально-доминированной ($p = 0$) Вселенной? (1 балл)

4.10 Нарисовать картинку, как зависят $\Omega(t)$, $\Omega_m(t)$, $\Omega_\Lambda(t)$ в плоской Вселенной из задачи 4.3. (1 балл)

4.11 Найти геометрическое место всех плоских вселенных на диаграмме $\Omega_m - \Omega_\Lambda$. Нарисовать траекторию плоской вселенной на этой диаграмме. (1 балл)

4.12 Нарисовать траекторию замкнутой вселенной на диаграмме $\Omega_m - \Omega_\Lambda$. (5 баллов)

4.13 Найти границу областей ускоренного и замедляющегося расширения на диаграмме $\Omega_m - \Omega_\Lambda$. (3 балла)

4.14 Найти на диаграмме $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ область вселенных, которые в дальнейшем реколлапсируют (т.е. перестанут расширяться и начнут сжиматься). (5 баллов)

4.15 Как выглядят изохроны, т.е. линии одинакового возраста, на диаграмме $\Omega_m - \Omega_\Lambda$? (3 балла)

4.16 Нарисовать на диаграмме $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ траектории вселенных. (3 балла)

4.17 Во сколько раз теперешний возраст Вселенной в плоской Λ CDM-модели с $\Lambda = 0.7$ больше, чем ее возраст в плоской модели без темной энергии? (3 балла)

5 Распространение света в разных моделях.

5.1 Когда мы впервые увидели бы квазар, который сейчас видим при $z = 10$, если бы он светил всегда? (в материально доминированной плоской вселенной) (3 балла)

5.2 Мы наблюдаем одну и ту же галактику долгое время. Как изменяется ее красное смещение z со временем? Нарисовать график. (Во вселенной де Ситтера; материально доминированной; радиационно доминированной.) (3 балла)

5.3 Имеется набор галактик одинакового размера на разных расстояниях (z) от нас. Как зависит от z угловой диаметр галактики в метрике де Ситтера? в материально доминированной вселенной? (3 балла)

5.4 Имеются 2 галактики с одинаковым красным смещением z по разные стороны от нас. Видят ли они друг друга? Если да, то с каким красным смещением? Рассмотреть случаи материально доминированной и де Ситтеровской Вселенной. (3 балла)

5.5 Из пункта А в пункт В, видимый при красном смещении z , в момент t_0 отправился фотон. Через сколько времени он достигнет цели? (а) в плоской МД вселенной, (б) во вселенной де Ситтера (3 балла)

5.6 В замкнутой материально доминированной Вселенной излучается фотон. Может ли он облететь "вокруг" и вернуться в ту же точку? Если да, то через какое время? Не противоречит ли возникающее таким образом самодействие принципу причинности? (5 баллов)

5.7 То же - в RD вселенной и вселенной, заполненной вакуумом. (2 балла)

5.8 Подсчеты источников. Пусть все галактики одинаковы, неизменны во времени и однородно распределены в пространстве. Найти их распределение по красному смещению $n(z)$ (нарисовать качественный график): а) в стационарной вселенной, б) во вселенной с $R \propto t$, в) во вселенной де Ситтера, г) в материально доминированной. (5 баллов)

5.9 Пусть мы живем во Вселенной из задачи 4.3, и пусть все галактики в ней вечны (со времени Большого взрыва) и неизменны, а распределение их по пространству однородно. Нарисуйте качественно, как выглядит распределение наблюдаемых галактик по красным смещениям. Напишите асимптотики при $z \rightarrow 0$, $z \rightarrow \infty$. (2 балла)

5.10 Пусть сейчас $\Omega = 0.5$. Оцените, чему она была равна в эпоху рекомбинации ($z \sim 1500$)? в эпоху нуклеосинтеза ($z \sim 10^{10}$)? (1 балл)

Горизонт частиц - граница геометрического места точек, доступных нашему наблюдению в данный момент времени. Т.е., если в любой из этих точек с момента Большого взрыва находился источник света, то фотоны от него в данное время попадают к нам.

5.11 Выразить координату горизонта $r_h(t)$ через масштабный фактор $R(t)$. (1 балл)

5.12 При каком уравнении состояния горизонт частиц неподвижен? (1 балл)

5.13 Существует ли (конечный) горизонт частиц в материально-доминированной вселенной; в радиационно-доминированной вселенной; во вселенной де Ситтера; в нашей вселенной?(1 балл)

5.14 Существуют ли точки, которых мы никогда не увидим? в плоской материально-доминированной вселенной; в радиационно-доминированной вселенной; во вселенной де Ситтера; в нашей вселенной?(1 балл)

6 Температурная история Вселенной. Рекомбинация и реликтовое излучение.

6.1 Свободный разлет. До рекомбинации фотоны были в тепловом равновесии с веществом, и имели планковское распределение по частотам. После рекомбинации тепловое равновесие фотонов и вещества нарушилось, и с тех пор фотоны движутся свободно, ни с чем не взаимодействуя. Как изменялась после рекомбинации функция распределения фотонов? (3 балла)

6.2 Имеется расширяющийся газ, состоящий из фотонов, протонов и электронов. При каких условиях система находится в термодинамическом равновесии? (1 балл)

6.3 Энтропия горячей Вселенной - это отношение концентрации фотонов в ней к концентрации барионов (протонов, электронов и т.д.). Оцените энтропию нашей Вселенной. (3 балла)

6.4 Рассмотрим адиабатическое расширение среды, состоящей из фотонов с небольшой примесью вещества, достаточной для поддержания термодинамического равновесия. Как по мере расширения меняется температура? (1 балл)

6.5 Учте в задаче 6.4 поправки, связанные с давлением и кинетической энергией вещества. (3 балла)

6.6 Пусть при расширении находящегося в ТД равновесии фотонного газа (см. задачу 6.4) "высшие силы" поддерживают постоянную температуру. Как зависит от масштабного фактора (извините, размера сосуда) концентрация электронов? фотонов? (3 балла)

6.7 Предположим, что температура реликтового излучения оказалась в 10 раз меньше, чем это есть на самом деле (а плотность вещества - та же). Оцените количественно, как отличались бы от действительных температура и красное смещение рекомбинации? А если бы температура реликта была меньше в 10^4 раз? (3 балла)

6.8 (Подсказка к) Как по мере расширения меняется температура в холодной Вселенной? (1 балл)

6.9 Вычислить температуру и красное смещение, при которых происходила рекомбинация (например, при которой степень ионизации $=1/2$). Современные температуру реликта и плотность барионов ($1m^{-3}$) считать известными. Использовать формулу Саха (см., напр., Ландау, Лифшиц т.V) (3 балла)

6.10 Пусть при некотором значении масштабного фактора, примерно в середине рекомбинации, "высшие силы" резко увеличили степень ионизации по сравнению с равновесной. Оценить время, через которое восстановится равновесие. А если степень ионизации не увеличили, а уменьшили? - будет ли ответ таким же? (5 баллов)

6.11 Остаточная ионизация. Если бы по мере уменьшения температуры процессы рекомбинации и ионизации оставались в равновесии, то степень ионизации описывалась бы формулой Саха и упала бы до нуля. Однако это не так. Почему прекращается применимость равновесной формулы Саха? Написать оценочное условие на температуру и концентрацию электронов, при которых это происходит. Оценить остаточную степень ионизации. (5 баллов)

6.12 Реионизация. В современной Вселенной вещество в основном ионизовано. Значит, после рекомбинации был период вторичной ионизации (предположительно, взрывами первых сверхновых). Однако существенного размывания флуктуаций СМВ при этом не произошло, т.е. реионизованное вещество уже не взаимодействовало с реликтовым излучением. Когда (при каких z) могла произойти реионизация? (5 баллов)

6.13 Рассмотрите момент времени непосредственно перед рекомбинацией. Оцените концентрации электронов, фотонов, фотонов с энергией больше энергии ионизации атома водорода, фотонов с энергией, равной половине этой энергии (2 балла).

7 Анизотропия реликтового излучения

7.1 Положение первого пика. Если наша Вселенная всегда была материально-доминированной, то в момент рекомбинации существовал горизонт частиц. Под каким углом мы сейчас видим точки, которые в момент рекомбинации находились друг у друга "на горизонте"? ($k = 0$) (3 балла)

7.2 Положение первого пика-2. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если считать, что Вселенная вплоть до рекомбинации была радиационно-доминированной? А если, наоборот, после рекомбинации она сразу стала де Ситтеровской? (3 балла)

7.3 Найти скорость звука до рекомбинации. (Плотностью материи не пренебрегать.) (3 балла)

7.4 Вывести соотношение $c_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle_m$, где c_l - коэффициент разложения $\langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle$ по полиномам Лежандра, a_{lm} - коэффициенты разложения $\Delta T(\hat{n})$ по сферическим гармоникам. (5 баллов)

7.5 Влияние Ω . Во вселенной с $\Omega = \Omega_m > 1$ в момент t_1 две точки, удаленные друг от друга на собственное расстояние L , излучают свет. Наблюдатель видит этот свет в момент t_0 . На каком угле он видит эти точки? Исследовать зависимость этого угла от Ω . (3 балла)

7.6 Как изменится ответ в задаче 7.5, если Вселенная не материально-доминированная, а заполнена вакуумом, $\Omega = \Omega_\Lambda > 1$? (3 балла)

7.7 Как изменится со временем спектр флуктуаций температуры реликта $(l(l+1)c_l(l))$? Оценить характерное время его изменения. (3 балла)

7.8 Сразу после (мгновенной) рекомбинации реликтовое излучение было изотропным. Почему? Через какое время появилась квадрупольная анизотропия? (5 баллов)

7.9 Если бы рекомбинация никогда не произошла (например, $I = 0$), то было ли бы сейчас реликтовое излучение? и если да, то какую температуру оно бы сейчас имело? (3 балла)

8 Флуктуации плотности

8.1 Исследовать развитие флуктуаций плотности во вселенной де Ситтера (вещество - малая добавка к плотности вакуума) при достаточно больших (по сравнению со скоростью звука) длинах волн.

8.2 Написать уравнения Эйнштейна и исследовать эволюцию пространства 2.9. Исследовать эволюцию флуктуаций в этом пространстве. (5 баллов)