

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования "Московский физико-технический институт  
(государственный университет)"

Магистерская диссертация  
Теория конуса потерь для галактических центров

Студент 028 гр. Лежнин К.В.

Научный руководитель:

к.ф-м.н. Апенко С.М.

Москва, 2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Теория конуса потерь</b>	<b>6</b>
2.1	Механизмы наполнения конуса потерь . . . . .	6
2.1.1	Парная релаксация . . . . .	8
2.1.2	Несимметричные моменты сил в галактических центрах	12
2.2	Классическая теория конуса потерь . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Методы численного моделирования</b>	<b>19</b>
3.1	Метод Фоккера-Планка . . . . .	19
3.2	Метод N-body . . . . .	23
3.3	Метод Монте-Карло . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Проблема расхождения наблюдательных и теоретических тем- пов приливного разрушения</b>	<b>28</b>
4.1	Темпы событий приливного разрушения в модельных сфери- ческих галактиках . . . . .	29
4.2	Вычисления темпов приливного разрушения для реальных га- лактик . . . . .	35
4.3	Темпы приливного разрушения звезд в галактиках произволь- ной геометрии: Монте Карло метод . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Заключение и обсуждение</b>	<b>48</b>

# 1 Введение

В настоящее время считается общепринятым существование компактных сверхмассивных гравитирующих объектов в галактических центрах большинства галактик (Kormendy & Ho, 2013; Graham, 2015). Хотя на сегодняшний день наблюдения не позволяют подобраться достаточно близко к гравитирующему объекту, дабы доказать наличие горизонта событий и утверждать, что в центре галактики именно черная дыра - по-прежнему обсуждаются разнообразные, в том числе и довольно экзотичные (Vambi, 2013; Li & Vambi, 2014), возможности природы центрального гравитирующего объекта, для простоты будем далее именовать центральный гравитирующий объект сверхмассивной черной дырой (далее SMBH - supermassive black hole). Являясь лишь малой частью от массы балджа галактики ( $\langle M_{\text{bh}}/M_{\text{buldge}} \rangle \approx 0.002$ , Marconi & Hunt, 2003), SMBH, тем не менее, оказывают существенное влияние на процессы, происходящие в области центрального галактического скопления, участвуя в реализации активности галактических ядер - образования квазаров, струйных выбросов - джетов, формирования массивных звезд и определяя физику аккреционного диска. Все эти процессы находят отображение во всем электромагнитном спектре - от радиоактивности галактических ядер (Kovalev et al., 2007) до рентгеновского свечения аккреционного диска вокруг SMBH (Sazonov et al., 2007) и вплоть до суперэнергичных единичных гамма-фотонов с энергиями более  $10^{15}$  eV (Abbasi et al., 2015). Одним из наблюдаемых проявлений являются так называемые события приливного разрушения (TDE - tidal disruption event) звезд (Rees, 1988). Эти события происходят, когда звезда пролетает достаточно близко к

SMBH, так что градиент гравитационной силы SMBH становится достаточным для разрыва звезды на части. Обломки звезды образуют аккреционный диск, который в свою очередь оставляет отпечатки во всем электромагнитном спектре (Komossa, 2015). TDE представляют интерес с целого ряда точек зрения: в качестве непрямого исследования сильной гравитации, ранней эволюции радио-джэтов, звездной динамики на масштабах, недоступных современным наблюдениям; высокие темпы TDE могут свидетельствовать о наличии двойных SMBH; наконец, TDE являются событиями, которые могут давать информацию о галактических центрах со спящими центральными ЧД. Кроме того, TDE имеют непосредственное отношение к теории роста ЧД (Freitag & Benz, 2002; Zhao et al., 2002) и могут являться источником информации о истории происхождения галактики и ее параметрах. Стоит отметить, что для достаточно массивных SMBH ( $\gtrsim 10^8 M_\odot$ ) приливное разрушение звезд не наблюдается и происходит захват звезды черной дырой целиком (см. Lodato, 2015, и ссылки внутри). Однако, хотя в данной работе мы и концентрируемся на подсчете событий приливного разрушения, в дальнейшем термины "приливное разрушение" и "захват" звезд черной дырой будут использованы взаимозаменяемо.

В данной работе обсуждается теория, позволяющая оценить темп событий приливного разрушения (или захвата) звезд, так называемая loss cone theory - теория конуса потерь. Термин "конус потерь" был заимствован из физики плазмы и отвечает за набор направлений, в которых может быть направлена скорость звезды в данной точке с данным абсолютным значением, чтобы за характерное динамическое время быть захваченной или разо-

рванной центральной черной дырой. Набор данных направлений ограничен конусом, который собственно и называется конусом потерь.

Поводом для очередного обращения к пересмотру классической теории конуса потерь послужила недавно возникшая проблема несоответствия наблюдательных и теоретических темпов событий приливного разрушения в центрах галактик (Stone & Metzger, 2016). Так, если средний наблюдательный темп приливного разрушения составляет  $10^{-5}$  событий в год на одну галактику, то стандартные теоретические оценки дают значение не менее  $10^{-4}$  событий в год на одну галактику. В данной работе был исследован вопрос о динамическом механизме, который мог бы привести к существенному понижению теоретических оценок на темпы приливного разрушения, и, как следствие, привести их в согласие с наблюдательными данными.

Данная работа организована следующим образом. В Главе 2 обсуждаются различные физические механизмы, приводящие звезды на орбиты, лежащие внутри конуса потерь и рассмотрена классическая теория конуса потерь. Глава 3 посвящена обзору численных методов, используемых для оценки темпов TDE, в четвертой Главе рассмотрены остро стоящие вопросы различия наблюдательных и теоретических оценок темпов приливного разрушения звезд, приводятся авторские пути разрешения данного вопроса. В Заключение подводятся итоги состояния области на сегодняшний момент и предлагаются вопросы для дальнейшего разрешения.

## 2 Теория конуса потерь

### 2.1 Механизмы наполнения конуса потерь

Для начала уточним, что же мы будем понимать под событием приливного разрушения звезды. Как было упомянуто выше, данное событие происходит в случае, когда самогравитации звезды недостаточно для поддержания целостности в сильно неоднородном гравитационном поле вблизи SMBH. Поянтно, что расстояние, на которое нужно приблизиться к SMBH звезде, существенно зависит и от класса самой звезды. Типичная оценка данного расстояния для звезд главной последовательности - так называемого приливного радиуса - дается соотношением:

$$R_t = \left( \eta^2 \frac{M_{bh}}{M_*} \right)^{1/3} R_*, \quad (1)$$

где  $M_*$  и  $R_*$  - масса и радиус звезды,  $M_{bh}$  - масса черной дыры, а  $\eta \sim 1$  - безразмерный параметр, зависящий от внутренней структуры звезды. Как известно, радиус Шварцшильда линейно растет с ростом массы SMBH, так что с некоторой массы SMBH звезды захватываются целиком, не оставляя существенного отпечатка в электромагнитном спектре. Обычно, данное граничное значение массы черной дыры оценивается как  $M_{bh} \approx 10^8 M_\odot$ , однако в релятивистском случае данная граница повышается до  $10^9 M_\odot$  (см. Lodato et al., 2015).

В терминах углового момента, для звезды, находящейся на кеплеровской круговой орбите  $R_t$ , граничный угловой момент, при котором звезда будет разорвана в течение динамического времени, обозначается  $L_{lc}$ , и равняется:

$$L_{lc} \equiv \sqrt{2GM_{bh} r_{lc}}, \quad (2a)$$

$$r_{lc} \equiv \max \left[ \frac{8GM_{bh}}{c^2}, R_t \right], \quad \eta \sim 1, \quad (2b)$$

где  $G$  - гравитационная постоянная,  $c$  - скорость света в вакууме. Таким образом, попадание в конус потерь фактически эквивалентно попаданию в область углового момента  $L < L_{lc}$ .

Обсудим, какие динамические механизмы могут привести к уменьшению углового момента звезд. Будем считать звезды точечными, их эволюцией пренебрежем, а центральную часть галактического скопления "сухой", то есть пренебрежем наличием свободной гравитирующей плазмы, процессами звездообразования и т.д.. Строго говоря, динамика точечных звезд в гравитационном поле черной дыры описывается гамильтонианом:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m_i} - \sum_{j>i}^N \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \right] + \frac{p_{bh}^2}{2M_{bh}} - \sum_{j=1}^N \frac{GM_{bh} m_j}{|\vec{r}_{bh} - \vec{r}_j|^2}, \quad (3)$$

где  $p$  - импульсы звезд и ЧД,  $\vec{r}$  - радиус-вектора звезд и ЧД. Обычно ради упрощения считают центральную ЧД неподвижной, несмотря на то, что движение черной дыры относительно центра масс может приводить к уменьшению темпа захвата звезд (Komossa & Merritt, 2008), что приводит к соответствующему упрощению в уравнениях движения для (3). Релятивистскими эффектами на данном этапе мы также пренебрегаем, хотя они и могут повлиять на темп захвата звезд (Alexander, 2015). Решение уравнений движения для данного гамильтониана не представляется возможным, поскольку сводится к гравитационной задаче  $N$  тел, которая для  $N \gg 1$  может быть

проинтегрирована численно (с корректным учетом столкновительных и бесстолкновительных эффектов, одинаково важных для теории конуса потерь) лишь для  $N \lesssim 10^6$ , что является недостаточным числом для корректного моделирования галактического кластера, центральная часть которого требует реализации  $10^8$  звезд и больше. Более подробное обсуждение N-body методов, которые все же применяются при обсуждении теории конуса потерь, последует в Главе 4. Сейчас же перейдем непосредственно к обсуждению динамических механизмов, изменяющих угловой момент звезд (угловой момент вычисляется относительно координаты ЧД).

### 2.1.1 Парная релаксация

Когда звезды проходят на близком расстоянии друг от друга - таком, что кинетическая энергия звезд сравнима с потенциальной энергией их взаимодействия, то есть на расстоянии  $p_0 \sim G(m_1 + m_2)/v_{rel}^2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  - массы звезд, а  $v_{rel}$  - модуль относительной скорости их движения - может произойти существенное рассеивание на угол порядка 90 градусов, что может сильно изменить угловой момент звезды, вплоть до значений меньше  $L_{lc}$ . Оценим характерное время для реализации подобного процесса в галактическом центре. Длина свободного пробега до сильного рассеивания равна  $\lambda \sim v_{rel}^4/G^2nm^2$ , где  $m$  - масса звезд,  $n$  - их концентрация в галактическом центре. Оценивая относительную скорость звезд как дисперсию скоростей  $\sigma$  в галактическом центре, получаем характерное время сильного рассеивания (обозначим его как  $t_{ce}$ ):



$$t_{ce} \sim \frac{\sigma^3}{G^2 n m^2}. \quad (4)$$

Кроме того, в галактическом скоплении возможна реализация и слабых рассеиваний (с прицельными параметрами  $p \gg p_0$ ), кумулятивный эффект от которых может привести к сильному рассеиванию. Оценка времени манифестации сильного рассеивания за счет множества слабых ( $t_r$ ) приводит к результату (Lightman & Shapiro, 1978):

$$\frac{t_r}{t_{ce}} \approx \frac{1}{8 \ln(0.5N)}. \quad (5)$$

Для галактических центров с  $N \geq 10^8$  получаем  $t_r/t_{ce} \sim 10^{-2}$ , что говорит о более важной роли слабых рассеиваний. Классическая формула для времени существенного изменения энергии звезды при рассеивании во внешнем однородном поле звезд (времени релаксации) обычно записывается как:

$$T_{rel} = \frac{0.34\sigma^3}{G^2 \rho m_* \ln \Lambda}, \quad (6)$$

где  $\rho$  - плотность массы звезд,  $m_*$  - масса фоновых звезд, а  $\Lambda$  - так называемый кулоновский логарифм, который равен отношению максимального и минимального прицельных параметров (Merritt, 2013). Из численных расчетов он обычно оценивается  $0.3 N - 0.4 N$ , численный фактор зависит от геометрии (Dehnen & Read, 2011). Нужно отметить, что время релаксации - локальная характеристика динамической системы в виду зависимости концентрации, дисперсии и кулоновского логарифма от координаты. В безразмерном виде данная формула будет выглядеть как (Merritt, 2013):

$$T_{rel} \approx 0.95 \times 10^{10} \left( \frac{\sigma}{200 \text{ km/s}} \right)^3 \left( \frac{\rho}{10^6 M_\odot / \text{pc}^3} \right)^{-1} \left( \frac{m_*}{M_\odot} \right)^{-1} \left( \frac{\ln \Lambda}{15} \right)^{-1} \text{ yr.} \quad (7)$$

Таким образом, видно, что для характерных параметров галактического центра  $T_{rel}$  по порядку величины превышает Хаббловское время  $T_H$ , что означает, что целый ряд галактических кластеров не будет релаксирован (и, как следствие, не будет представлен в виде каспа Бахкалла-Вулфа  $\rho \sim r^{-7/4}$  (Bahcall & Wolf, 1976)), что и наблюдается в реальности (Merritt, 2013).

Однако, как показано в ряде классических работ и будет пояснено в Главе 3, более важным для теории конуса потерь является временной масштаб, на котором профиль функции распределения звезд по моментам становится квазистационарным (Cohn & Kulsrud, 1978; Merritt, 2013). Учитывая диффузионный характер изменений в угловом моменте, можно оценить данный временной масштаб следующим образом. Изменение углового момента за время  $t$  оценивается как  $\Delta L^2 \approx L_{\text{circ}}(\mathcal{E})^2 \mathcal{D} t$ , где  $\mathcal{D}$  - коэффициент диффузии,  $L_{\text{circ}}(\mathcal{E})$  - угловой момент звезды с энергией  $\mathcal{E}$ , находящейся на круговой орбите. Отсюда, оценивая время существенного изменения модуля углового момента орбиты с начальным значением  $L_0$  (далее -  $T_L$  - время релаксации по угловым моментам) как  $L_0^2 / \frac{d}{dt} (L^2)$  и учитывая, что  $\mathcal{D} \sim T_{rel}^{-1}$ , мы получаем:

$$T_L \approx T_{rel} \frac{L_0^2}{L_{\text{circ}}^2}. \quad (8)$$

Отсюда, принимая  $L_0 = L_{1c}$ , следует, что  $T_L \ll T_{rel}$ . Таким образом, время релаксации по угловым моментам может быть меньше времени су-

ществования галактики, что означает, что мы можем ожидать реализации квазистационарного профиля распределения звезд по угловым моментам, что, впрочем, может быть не так для галактик с массой центральных черных дыр более  $10^7 M_\odot$  (Merritt & Wang, 2005; Lezhnin & Vasiliev, 2015).

В случае наличия некоторого спектра масс звездных объектов, массивных молекулярных облаков или черных дыр средней массы, можно ожидать, что именно эти объекты будут доминировать в процессе парной релаксации, увеличивая темп захвата звезд по сравнению со стационарным (Perets et al., 2007; Stone & Metzger, 2016). Так, оценка для времени релаксации по энергиям может быть занижена, поскольку при наличии спектра масс в формуле (6) произведение  $\rho m_*$  будет заменено на выражение  $\int n(m)m^2 dm$ , где  $n(m)dm$  - локальная плотность звезд с массами в интервале  $dm$ ; наличие неучтенных ранее массивных объектов может дать значительный вклад в интеграл и, как следствие, привести к увеличению эффективности диффузии или даже давать доминирующий вклад в диффузию (Merritt, 2013).

Также, кроме описанного выше процесса нерезонансной релаксации, существует механизм коррелированного взаимодействия орбит, который также приводит к увеличению темпов захвата звезд. Однако, реализация данного механизма подавлена (Merritt, 2013; Vasiliev, 2014). То же можно сказать и про влияние релятивистских эффектов, которые также проявляются за счет резонансного взаимодействия орбит (Alexander, 2015).

## 2.1.2 Несимметричные моменты сил в галактических центрах

У точечной массивной частицы, двигающейся в центральном гравитационном потенциале  $\Phi(\vec{r}) = -GM_{\text{bh}}/r + \Phi_*(\vec{r})$  (первое слагаемое - вклад в потенциал от ЧД, второе - от звезд), есть четыре интеграла движения - полная энергия  $E = v^2/2 + \Phi(\vec{r})$  и три компоненты углового момента  $L_i$ , которые полностью определяют ее траекторию. В сферически симметричном галактическом кластере при выключении процессов релаксации центральная черная дыра, таким образом, "выест" все те орбиты, полный угловой момент которых  $L < L_{lc}$ , на чем процесс захвата звезд черной дырой закончится. В более реалистичном же случае, отличном от сферически симметричного (Tremblay & Merritt, 1996), например, в осесимметричном или триаксиальном случаях, число классических интегралов движения меньше - два в осесимметричном (сохраняются энергия  $E$  и проекция углового момента на одну ось  $L_z$ ) и один в триаксиальном случае (энергия  $E$ ). Кроме классических интегралов движения, для орбит в окрестности черной дыры можно выделить еще один интеграл движения  $I = \sqrt{GM_{\text{bh}}a}$ , где  $a$  - большая полуось (Sridhar & Touma, 1999). Данный интеграл не добавляет новых особенностей в случае сферической симметрии, однако в случае осесимметричного или триаксиального потенциала в ряде предположений также позволяет точно проинтегрировать орбиты звезд (Vasiliev & Merritt, 2011). Отметим, что и в более общих случаях ожидается регулярность орбит в окрестности центральной черной дыры при пренебрежении релятивистскими эффектами (Vasiliev, 2014).

В отсутствии сферической симметрии для регулярных околокешлеров-

ских орбит влияние несимметричных моментов сил может проявиться в степени, достаточной для уменьшения углового момента до значений  $L < L_{lc}$ . Так, в осесимметричном случае, для орбит с  $L^2/L_{\text{circ}}^2 \lesssim \epsilon$ , где  $\epsilon \approx 1 - x/z$ , где  $x$  и  $z$  - большая и малая полуоси, несимметричные моменты сил эффективно сводят данные орбиты в область конуса потерь, несколько увеличивая темп захвата звезд (Vasiliev & Merritt, 2013). В случае триаксиального потенциала, более важной составляющей темпа захвата звезд является приток звезд в конус потерь из семейства орбит, эволюция которых в триаксиальном потенциале в отсутствии релаксации, тем не менее, приводит их в область конуса потерь. Так, к подобным орбитам относятся центрофильные орбиты, которые по определению могут приближаться сколь угодно близко к гравитирующему центру и, как следствие, будут поглощены им за конечное время. Время истощения данного семейства орбит может быть оценено при помощи выражения (Merritt & Vasiliev, 2011):

$$T_{\text{drain, triax}} \approx 10^{10} \epsilon \left( \frac{a}{10 \text{ pc}} \right)^{5/2} \left( \frac{M_{\text{bh}}}{10^8 M_{\odot}} \right)^{-3/2} \text{ yr}, \quad (9)$$

справедливого для ЧД с  $M_{\text{bh}} > 10^8 M_{\odot}$  и орбит с большой полуосью  $a$  меньше порядка так называемого радиуса влияния  $r_{\text{infl}}$ . Последний в данной работе будет определяться как радиус сферы, в которой содержится масса звезд, равная удвоенной массе черной дыры:  $M_*(r \leq r_{\text{infl}}) = 2M_{\text{bh}}$ . Физический смысл данной величины - переходный масштаб между областью, в которой динамика звезд доминируется наличием ЧД, орбиты - слабозмущенные кеплеровские ( $r < r_{\text{infl}}$ ), и областью, где влияние гравитации ЧД малозаметно и орбиты могут быть существенно нерегулярными ( $r > r_{\text{infl}}$ ).

Итак, из формулы (9) следует, что для большинства галактик данная популяция орбит не будет истощена за время их существования, что, как будет показано далее в Главе 4, будет существенным образом влиять на темпы приливного разрушения звезд.

## 2.2 Классическая теория конуса потерь

Перейдем теперь к описанию классической теории конуса потерь, которая чаще всего используется для оценок темпов приливного разрушения звезд в галактических центрах.

Результаты, упомянутые здесь, были выведены в контексте шаровых звездных скоплений содержащих черные дыры средних масс (Lightman&Shapiro, 1977; Cohn&Kulsrud, 1978). Впоследствии, данная теория была применена к галактическим центрам (Magorrian & Tremaine, 1999) для оценки приливного разрушения звезд центральной сверхмассивной черной дырой. Одним из основных предположений этих исследований является предположение о том, что время жизни этих систем больше или порядка времени релаксации, что позволяет использовать стационарное уравнение Фоккера-Планка для описания этих систем (Cohn & Kulsrud, 1978).

Ограничимся рассмотрением сферически симметричных галактик; в них функция распределения звезд в фазовом пространстве по теореме Джинса будет зависеть от двух интегралов движения - энергии  $E$  и углового момента  $L$ . Запишем уравнение Больцмана в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{v_r} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\langle (\Delta R)^2 \rangle}{2R} R \frac{\partial f}{\partial R} \right], \quad (10)$$

(Cohn & Kulsrud, 1978, уравнение 30), где  $f(E, R, r)d^3rd^3v$  - вероятность нахождения звезды в элементе фазового пространства  $d^3rd^3v$ ,  $v_r$  - радиальная скорость движения звезды,  $R = J^2/J_{\text{circ}}^2(E)$  - нормированный квадрат углового момента и  $\langle (\Delta R)^2 \rangle$  - коэффициент диффузии по угловым моментам. Отметим, что все члены, соответствующие диффузии по энергии были исключены из уравнения в виду того, что градиенты в  $E$  много меньше градиентов в  $R$  в окрестности конуса потерь.

Окончательно, условие применимости стационарного усредненного по орбитам уравнения Фоккера-Планка может быть записано как:

$$P(E) \ll T_{rel} \ll T_{age}, \quad (11)$$

где  $P(E)$  - характерный орбитальный период (динамическое время) звезды с энергией  $E$  и  $T_{age}$  - время жизни звездной системы. Если перестанет выполняться первое сильное неравенство, то приведенный вид разложения уравнения Больцмана неприменим и сильные рассеяния преобладают над слабыми. В том случае, если второе неравенство не выполняется, система не является релаксированной и может эволюционировать; в таком случае, требуется использование зависящего от времени уравнения Фоккера-Планка. Стоит отметить, что для большинства реальных галактик второе неравенство практически никогда не выполняется (Merritt, 2013).

Как было сказано выше, звезды, проходящие на расстоянии  $r_{lc}$  от гравитирующего источника, разрушаются центральной ЧД. Таким образом,

функция распределения должна обращаться в ноль для этой области значений  $r$ :

$$f(E, R, r) = 0 \quad (r \leq r_{lc}). \quad (12)$$

Lightman & Shapiro, 1977, получили усредненное по орбитальному периоду аналитическое решение  $f(E, R)$  уравнения (10) соответствующего граничному условию (12):

$$f(E, R) \equiv P^{-1}(E) \oint \frac{dr}{v_r} f(E, R, r) = C \ln \left( \frac{R}{R_0} \right), \quad (13)$$

где  $C$  - нормировочная константа, которая будет определена далее, а  $R_0(E)$  - не зависящий от энергии граничный угловой момент.

Уравнение (13) предполагает что  $f(E, R, r)$  тождественно зануляется при  $R \leq R_0$ . В отсутствии парной релаксации,  $R_0 = R_{lc}$ , где  $R_{lc}(E)$  - угловой момент частицы с перицентром лежащим на сфере захвата звезды ЧД,  $r_-(E, R_{lc}) = r_{lc}$ . При наличии релаксации, ряд звезд может успеть войти и выйти из области захвата  $R < R_{lc}$  в течение одного орбитального периода, избежав, таким образом, разрушения/поглощения. Sohn & Kulsrud, 1978, провели анализ граничного конуса потерь слоя и получили следующие соотношения между  $R_0$  и  $R_{lc}$ :

$$R_0(E) = R_{lc}(E) \times \begin{cases} \exp(-q), & q(E) > 1 \\ \exp(-0.186q - 0.824\sqrt{q}), & q(E) < 1, \end{cases}$$

где  $q(E)$  это отношение радиального орбитального периода  $T_{\text{rad}} = \oint dr v_r^{-1}$  для звезды с энергией  $E$  к характерному времени свободного блуждания,



необходимому для выхода из конуса потерь (для звезды с энергией  $E$ ):

$$q(E) \equiv \frac{1}{R_{lc}(E)} \oint \frac{dr}{v_r} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta R)^2 \rangle}{2R}, \quad (14)$$

где значение выражения под знаком предела - коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  в пространстве  $R$  для орбит с  $R \ll 1$ .

Если динамическое время много меньше чем время свободного блуждания  $q \ll 1$ , то мы находимся в "диффузионном" режиме, конус потерь - "пустой" (все звезды, попавшие в него, захватываются за время порядка динамического), и  $R_0 \approx R_{lc}$ . В противоположном случае ( $q \gg 1$ ), конус потерь является "полным" — те орбиты, которые были устранены либо черной дырой, либо вышли из конуса потерь в силу эффективности двутельных процессов, быстро компенсируются за счет диффузии, для них  $R_0 \ll R_{lc}$ . Значение энергии, для которого  $q = 1$ , называется критическим, большая часть темпа захвата обеспечивается орбитами с энергиями около критической.

Постоянная  $C$  может быть выражена в терминах изотропизированной функции распределения  $\bar{f}(E) = \int_0^1 f(E, R) dR$ :

$$C(E) = (R_0 - \ln R_0 - 1)^{-1} \bar{f}(E). \quad (15)$$

Окончательно, усредненное по орбитальному периоду решение стационарного уравнения Фоккера-Планка запишется в виде (принимая во внимание, что  $R_0 \ll 1$ ):

$$f(E, R) = \frac{\ln(R/R_0)}{\ln(1/R_0) - 1} \bar{f}(E). \quad (16)$$

В этом случае, темп захвата звезд определяется формулой:

$$\mathcal{F}(E)dE = 4\pi^2 J_{\text{circ}}(E)^2 T_{\text{rad}}(E) \times \frac{\mathcal{D}\bar{f}}{\ln(1/R_0) - 1} dE. \quad (17)$$

Таким образом, задавая профиль светимости (профиль плотности) галактического центра, можно вычислить (хотя, в ряде предположений и не для всех профилей светимости) стационарные темпы захвата (приливного разрыва) звезд центральной черной дырой.

Стоит отметить, что результаты для  $R_0$ , полученные в работе Cohn & Kulsrud, 1978, могут быть уточнены в виду наличия аналитического решения тех же уравнений (Merritt, 2013).

Полный темп захвата звезд, который получается при интегрировании выражения (16) по всем значениям энергии, будем в дальнейшем обозначать  $\mathcal{F}_0$ . В очередной раз отметим, что данный результат для темпа захвата был получен при ряде сильных предположений - о сферической симметрии звездной системы, при пренебрежении орбитами, которые проваливаются в черную дыру за конечное время в отсутствие релаксации (что, впрочем, в случае сферической симметрии вполне оправдано), выполнении условий уравнения (11), предположении о существовании изотропной функции распределения звезд для выбранного профиля плотности звезд. В Главе 4 будет показано, насколько сильно будет отклоняться темп захвата звезд при невыполнении тех или иных предположений, перечисленных выше.

## 3 Методы численного моделирования

В предыдущей Главе были приведены сведения о классической теории ко- нуса потерь. Однако, при ее непосредственном применении к интересующим нас звездным системам - галактическим центрам - можно обнаружить, что ряд предположений классической теории для них не выполняется. Ниже мы приведем основные методы численного моделирования, используемые для вычисления темпов захвата звезд, которые позволят уточнить значения, по- лученные при помощи классической теории.

### 3.1 Метод Фоккера-Планка

Начнем с метода уравнения Фоккера-Планка. В Главе 3 был применен метод стационарного усредненного по орбитальному периоду уравнения Фоккера- Планка. В данном же пункте, опишем метод зависящего от времени, усред- ненного по орбитальному периоду уравнения Фоккера-Планка, который бу- дет использоваться в последующих вычислениях.

Предполагая, что функция распределения  $f$  зависит от энергии  $E$  и угло- вого момента  $R$  -  $f = f(E, R, t)$  - запишем разложение уравнения Больцмана вплоть до второго порядка по этим переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial E} (f \langle \Delta E \rangle_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} (f \langle (\Delta E)^2 \rangle_t) \\ & -\frac{\partial}{\partial R} (f \langle \Delta R \rangle_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (f \langle (\Delta R)^2 \rangle_t) + \frac{\partial^2}{\partial E \partial R} (f \langle \Delta E \Delta R \rangle_t). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь угловые скобки обозначают соответствующие коэффициенты диф-

фузии, а индекс  $t$  означает усреднение по невозмущенным орбитам. Для данного уравнения может быть поставлена краевая задача и оно может быть решено сеточными методами (Merritt, 2015a) с учетом как коррелированной, так и некоррелированной релаксации в пространстве углового момента и энергии. Однако, как было подтверждено результатами применения данного метода (Merritt, 2015bcd), строгий учет резонансной релаксации дает лишь малую поправку к темпам захвата звезд, а роль диффузии в пространстве энергии проявляется лишь для времен  $\gtrsim 0.1 T_{rel}$  (Cohn & Kulsrud, 1978; Merritt, 2015bcd), так что ограничимся рассмотрением одномерной диффузии в пространстве углового момента  $R$ .

Учитывая выражение для соотношения между коэффициентами диффузии первого и второго порядков по  $R$  и рассматривая предел малых  $R$ , в котором  $\langle(\Delta R)^2\rangle \sim R$ , запишем итоговое уравнение:

$$\frac{\partial f(E, R, t)}{\partial(\mathcal{D}t)} = \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial f}{\partial R} \right), \quad (19)$$

что представляет собой уравнение радиальной диффузии в цилиндрической геометрии (Ozisik, 1980). Для полной постановки задачи нужно сформулировать вид граничных и начальных условий. Внешнее граничное условие, для  $R = 1$ , обычно ставится Нойманновского типа, что означает зануление потока звезд вдоль  $R$  вдали от конуса потерь. В формульном виде оно записывается как:

$$\left. \frac{\partial f(E, R, t)}{\partial R} \right|_{R=1} = 0. \quad (20)$$

Граничное условие же на внутренней границе,  $R = R_{lc}$ , сильнее влияет на результирующий темп захвата и должно быть рассмотрено более подробно. Обычно граничное условие ставится на  $R_{lc}$  и самым частым является абсорбирующее граничное условие - функция распределения тождественно зануляется для всех  $R \leq R_{lc}$ :

$$f(E, R, t) \Big|_{R=R_{lc}} = 0. \quad (21)$$

Данное приближение достаточно точно выполняется в случае пустого конуса потерь, однако в случае полного конуса потерь или некоем промежуточном случае приходится неким образом корректировать данное граничное условие. Cohn & Kulsrud, 1978, в своей работе предположили, что в случае "непустого" конуса потерь можно эффективно сдвинуть границу обнуления функции распределения внутрь в предположении о логарифмическом профиле распределения в окрестности границы поглощения согласно формулам (2.2). Альтернативно, можно задать граничное условие типа Робина на  $R = R_{lc}$ , которое позволит осуществить адекватную интерполяцию между пустым и полным конусами потерь (Vasiliev & Merritt, 2013; Lezhnin & Vasileiv, 2015):

$$f(j_{lc}) = \frac{\alpha j_{lc}}{2} \frac{\partial f(j)}{\partial j} \Big|_{j=j_{lc}}, \quad \alpha(q) \approx (q^2 + q^4)^{1/4}. \quad (22)$$

Общее зависящее от времени решение уравнения (19) с приведенными выше граничными условиями может быть выражено в виде ряда, по анало-

гии с Miloslavlevic & Merritt, 2003:

$$f(j, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m A(\beta_m, j) \exp(-\mathcal{D}\beta_m^2 t/4), \quad (23)$$

$$A(\beta, j) \equiv J_0(\beta j)Y_1(\beta) - Y_0(\beta j)J_1(\beta), \quad (24)$$

$$C_m \equiv \frac{(\pi^2/2) \beta_m^2 J_0^2(\beta_m)}{J_0^2(\beta_m) - J_1^2(\beta_m)} \int_0^1 j' A(\beta_m, j') f(j', 0) dj',$$

где  $J_i$  и  $Y_i$  - функции Бесселя первого и второго типов,  $A$  - базисные функции,  $\beta_m$  - корни определенного уравнения, которое удовлетворяет граничным условиям для каждой базисной функции, и  $C_m$  - коэффициенты разложения, вычисляемые из начальных условий  $f(E, j, 0)$ . Miloslavlevic & Merritt, 2003, производили вычисления для предельного случая пустого конуса потерь, то есть для абсорбирующего граничного условия (21). В подходе же Lezhnin & Vasiliev, 2015, внутреннее граничное условие было записано в наиболее общем виде (22). В данном случае, коэффициенты  $\beta_m$ , входящие в выражение для разложения в ряд, являются корнями следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & [J_0(\beta_m j_{lc}) + \alpha \beta_m j_{lc} J_1(\beta_m j_{lc})/2] Y_1(\beta_m) - \\ & [Y_0(\beta_m j_{lc}) + \alpha \beta_m j_{lc} Y_1(\beta_m j_{lc})/2] J_1(\beta_m) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Данная модификация необходима для получения строгого решения для нетривиальных начальных условий, которые будут обсуждаться в данной работе в Главе 4.

Отметим также, что решение в виде ряда с конечным числом членов  $m_{\max}$  не применимо для ( $t \lesssim 10 \mathcal{D}^{-1} m_{\max}^{-2}$ ) в виду медленной сходимости ряда, так что в данном случае целесообразно применение решения с помощью разностных схем.

## 3.2 Метод N-body

Наиболее реалистичным методом моделирования динамики галактических центров, описываемой гамильтонианом (3), является N-body моделирование. Оно позволяет вне каких-либо предположений о динамике орбит описывать тесные кратные звездные системы, близкие прохождения нескольких тел, в данном подходе абсолютно естественным образом могут быть введены все сопутствующие процессы, такие как звездная эволюция, физические столкновения звезд, наличие приливного поля и т.п. Однако, в виду необходимости разрешать траектории на временах порядка дней (для тесных двойных) и порядка гигаlet (для рассмотрения процессов релаксации, коллапса ядра, гравитермальных осцилляций и т.д.), прямое N-body моделирование предъявляет высокие требования к вычислительным мощностям. Так, полное моделирование эволюции шарового скопления M4, состоящего из  $5 \cdot 10^5$  звезд, в рамках параллельного кода NBODY6 заняло 3 года (Heggie, 2014). Применительно к рассматриваемой в данной работе задаче, при рассмотрении масс черных дыр от  $10^6 M_{\odot}$  и массой балджа звезд, не менее чем в 100 раз большей, нам пришлось бы моделировать систему из  $10^8$  звезд, что на данный момент не представляется возможным.

Однако, существует ряд подходов, в котором N-body моделирование с той или иной степенью достоверности можно использовать в задаче о конусе потерь. Так, в Brockamp et al., 2011 и Zhong et al., 2014, 2015, были проведены N-body моделирования для широкого набора значений параметров – числа звезд и размеров сферы захвата. Для получения оценок для реальных физических систем авторы предлагали метод экстраполяции к реальным пара-

метрам галактики, который, однако, может привести к искажению физических результатов (например, к экстраполяции результатов режима полного конуса потерь к системе с пустым конусом потерь и наоборот), что налагает определенные сомнения на корректность данных результатов и N-body подхода применительно к теории конуса потерь вообще.

### 3.3 Метод Монте-Карло

Неким промежуточным вариантом как по вычислительной сложности, так и по реальности представления звездной системы между N-body и Фоккер-Планк методами является метод Монте-Карло моделирования. Данный метод также, как и N-body, предоставляет возможность включить в рассмотрение эффекты звездной эволюции, наличия спектра масс, двойные звезды, трех- и четырехтельные процессы, звездные слияния и так далее. Однако, в его основе лежит представление о нахождении системы в динамическом равновесии, так что он пригоден лишь для исследования эволюции системы на временах порядка  $T_{rel}$ , динамические же процессы, доступные прямому N-body моделированию, данным методом рассмотрены быть не могут.

Для простоты можно утверждать, что метод Монте-Карло (в обсуждаемом виде, см. Vasiliev, 2015) есть решение уравнения Ланжевена для крупных частиц в самосогласованном потенциале с произвольными рассеиваниями на локальных плотностях массы. Особенностью используемого метода является возможность изучать влияние эффектов несферичности звездной системы на темпы захвата звезд, которые, как известно, проявляют себя существенным образом для тяжелых галактик с  $M_{bh} \gtrsim 10^7 M_{\odot}$  (Vasiliev &



Merritt, 2013; Vasiliev, 2014).

В основе метода лежит интегрирование орбит на траекториях, задаваемых гладким потенциалом, являющимся решением уравнения Пуассона (Hernquist & Ostriker, 1992):

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r}). \quad (26)$$

Раскладывая потенциал и профиль плотности по соответствующим базисным функциям (обычно ортогональным), которые являются решениями уравнения (26):

$$\rho(\vec{r}) = \sum_n C_n \rho_n(\vec{r}), \quad (27)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_n C_n \Phi_n(\vec{r}), \quad (28)$$

$$\nabla^2 \Phi_n(\vec{r}) = 4\pi \rho_n(\vec{r}), \forall n.$$

Функции  $\Phi_n(\vec{r})$  обычно выбираются в виде произведения зависящей от радиуса части на сферическую гармонику:  $\Phi_n(\vec{r}) = \Phi_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ ,  $\mathbf{n} = \{n, l, m\}$ . Коэффициенты  $C_n$  можно найти из  $C_n = \sum_{i=1}^N \Phi_n(\vec{r}_i) m_i$ .

На начальном шаге вычисляются коэффициенты разложения  $C_n$ , далее частицы передвигаются в гладком потенциале с шагом  $\ll T_{dyn}$ .

Данный метод хорошо подходит для бесстолкновительного моделирования, поскольку в нем исключено парное взаимодействие частиц; динамика же определяется средним полем гладкого потенциала. Однако, наличие дискретного шума при вычислении коэффициентов разложения потенциала все

еще обеспечивают довольно высокий уровень нежелательной численной релаксации (Vasiliev, 2015). Для преодоления данной проблемы используется ряд методов, таких как временное сглаживание потенциала - более редкий пересчет потенциала с сохранением достаточно малого шага интегрирования орбит, и использование частей траектории движения частиц для вычисления нового потенциала для уменьшения дискретного шума.

Для введения парной релаксации в рассмотрение мы определенным образом модифицируем скорость частицы передвинутый в гладком потенциале с использованием локальных значений коэффициентов диффузии. Так, запишем выражения для коэффициентов дрефта и диффузии из (Merritt, 2013) как:

$$v\langle\Delta v_{\parallel}\rangle = -\left(1 + \frac{m}{m_*}\right) I_{1/2}, \quad (29)$$

$$\langle\Delta v_{\parallel}^2\rangle = \frac{2}{3}(I_0 + I_{3/2}), \quad (30)$$

$$\langle\Delta v_{\perp}^2\rangle = \frac{2}{3}(2I_0 + 3I_{1/2} - I_{3/2}), \quad (31)$$

где  $m$  и  $m_*$  - массы частиц и фоновых звезд (на которых происходит рассеивание) соответственно, и

$$I_0 = \Gamma \int_E^0 dE' f(E'), \quad (32)$$

$$I_{n/2} = \Gamma \int_{\Phi(r)}^E dE' f(E') \left(\frac{E' - \Phi}{E - \Phi}\right)^{n/2}, \quad (33)$$

$$\Gamma = 16\pi^2 G^2 m_* \ln \Lambda = 16\pi^2 G^2 M_{\text{tot}} \times (N_*^{-1} \ln \Lambda). \quad (34)$$

Данные формулы позволяют вычислить средние и среднеквадратичные

изменения скорости за единицу времени.

Отметим следующие важные моменты. Во-первых, данные выражения написаны в предположении о сферической симметрии системы - функция распределения  $f(E)$  является изотропной, как и потенциал  $\Phi(r)$ . Таким образом, несмотря на то, что самосогласованное поле может не обладать сферической симметрией, теорию релаксации мы используем для сферической симметрии, что накладывает ограничения на степень несферичности системы, которую мы можем рассмотреть с применением данного метода. Во-вторых, заметим, что в выражении для амплитуды коэффициентов диффузии (34) нет зависимости от числа частиц, используемых в моделировании - таким образом, мы можем выбирать амплитуду парной релаксации соответствующей той реальной звездной системе, для которой мы проводим моделирование. Данное свойство используемого алгоритма помогает корректно учесть как бесстолкновительные, так и столкновительные эффекты, одинаково важные для обсуждаемой в данной работе теории конуса потерь.

Окончательно, формулы для вычисления возмущений скорости частиц за счет релаксации могут быть записаны в виде:

$$\Delta v_{\parallel} = \langle \Delta v_{\parallel} \rangle \Delta t + \zeta_1 \sqrt{\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle \Delta t}, \quad (35)$$

$$\Delta v_{\perp} = \zeta_2 \sqrt{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle \Delta t}, \quad (36)$$

где  $\zeta_1, \zeta_2$  - нормально распределенные случайные величины. За более подробным описанием Монте Карло кода RAGA можно обратиться к работе Vasiliev, 2015.

## 4 Проблема расхождения наблюдательных и теоретических темпов приливного разрушения

Основной мотивацией данной работы является недавно поднятая проблема расхождения наблюдательных и теоретических темпов событий приливного разрушения в галактических центрах. Так, Stone & Metzger, 2016, показали, что простые теоретические оценки, основанные на классической теории с учетом наличия спектра масс звезд, превышают наблюдательные как минимум на порядок. Stone & Van Vezelen, 2016, показали, что в определенных типах галактик (т.н. E+A galaxies) темпы приливного разрушения могут быть еще выше, что еще больше подчеркивает наличие трений между теорией и наблюдениями.

Решения нестационарного уравнения Фоккера-Планка, в свою очередь, могут существенно отклоняться от стационарного, влияя на темпы приливного разрушения как в большую (Milosavljevic & Merritt, 2003; Vasiliev & Merritt, 2013), так и меньшую сторону (Merritt & Wang, 2004; Lezhnin & Vasiliev, 2015, 2016), за счет выбора соответствующих начальных условий.

Обсудим, каким образом начальные условия могут повлиять на темпы приливного разрушения в рамках нестационарного Фоккер-Планк формализма (далее НФП) в сторону уменьшения теоретических темпов TDE.

## 4.1 Темпы событий приливного разрушения в модельных сферических галактиках

Решение стационарного уравнения Фоккера-Планка, которое, как было показано выше, имеет логарифмическую зависимость функции распределения от  $j$ , применимо на временах порядка нескольких  $T_{\text{rel}}$ . Для многих галактических центров (см. график Lauer et al., 2007) данное время существенно превышает  $T_{\text{H}}$ . Таким образом, выбор начальных условий существенно влияет на темпы приливного разрушения звезд. Рассмотрим два класса начальных условий с дефицитом звезд в области малых угловых моментов.

Первая возможная причина для подобного дефицита - трехтельные процессы, имевшие место во время фазы слияния двойной сверхмассивной черной дыры, которая могла существовать в центре галактики ранее. Так называемый "механизм рогатки" (Saslaw et al., 1974) приводит к тому, что звезды, пролетающие близко в окрестности двойной сверхмассивной черной дыры, выбрасываются с большими кинетическими энергиями из центров галактики. Данный процесс приводит к уплощению профиля плотности звезд в центре галактики и формированию ядра (Milosavljevic & Merritt, 2001; Merritt, 2006), что наблюдалось [см. DulloGraham2012,Rusli2013].

Что более важно для нашего обсуждения, "механизм рогатки" создает дефицит звезд в области малых угловых моментов, выбрасывающий звезды с радиусами перицентров орбит порядка радиуса двойной SMBH,  $a_h \equiv q/[4(1+q)^2] r_{\text{infl}}$ , где  $q \equiv m_2/m_1 \leq 1$  отношение масс компонент двойной SMBH и  $r_{\text{infl}}$  - радиус влияния двойной SMBH, который, так же как и в слу-

чае одинарной SMBH, определяется как радиус сферы, содержащей в себе две массы двойной компоненты SMBH до "включения" процессов эжекции звезд "механизмом рогатки".

В работе Merritt & Wang, 2005 обсуждалось нестационарное решение уравнения ФП согласно описанному в Главе 3.1 формализму с внутренним граничным условием, соответствующему режиму пустого конуса потерь, с начальным распределением звезд по угловым моментам согласно  $f(E, J) \propto \Theta(J - (E))$ . Здесь  $J_{\text{gap}}(E) \equiv K a_h \sqrt{2 [E - \Phi(K a_h)]}$ , с безразмерной константой  $K \simeq 1$ .

В данной работе использовался Монте-Карло код RAGA (Vasiliev, 2015; Vasiliev, Antononi & Merritt, 2015; Глава 3.2) для определения распределения звезд по угловым моментам в галактике с двойной SMBH; результаты подобного моделирования наилучшим образом приближаются следующим образом (Рис. 1):

$$f(E, J, 0) = f(E) \cdot \min \left( 1, \left( \frac{J}{J_{\text{gap}'}} \right)^6 \right). \quad (37)$$

где  $J'_{\text{gap}} \equiv \sqrt{K' G(m_1 + m_2)}$ ,  $K' \simeq 3$ .

Другая возможная физическая причина выбора неизотропных начальных условий - тангенциальная анизотропия на всем диапазоне значений угловых моментов  $J$ . Так, в работе Cuddeford, 1991, предлагается описание галактик функцией распределения с анизотропией скоростей, описываемое следующей формулой:

$$f(E, J) = (1 - \beta) [J / J_{\text{circ}}(E)]^{-2\beta} \tilde{f}(E), \quad (38)$$

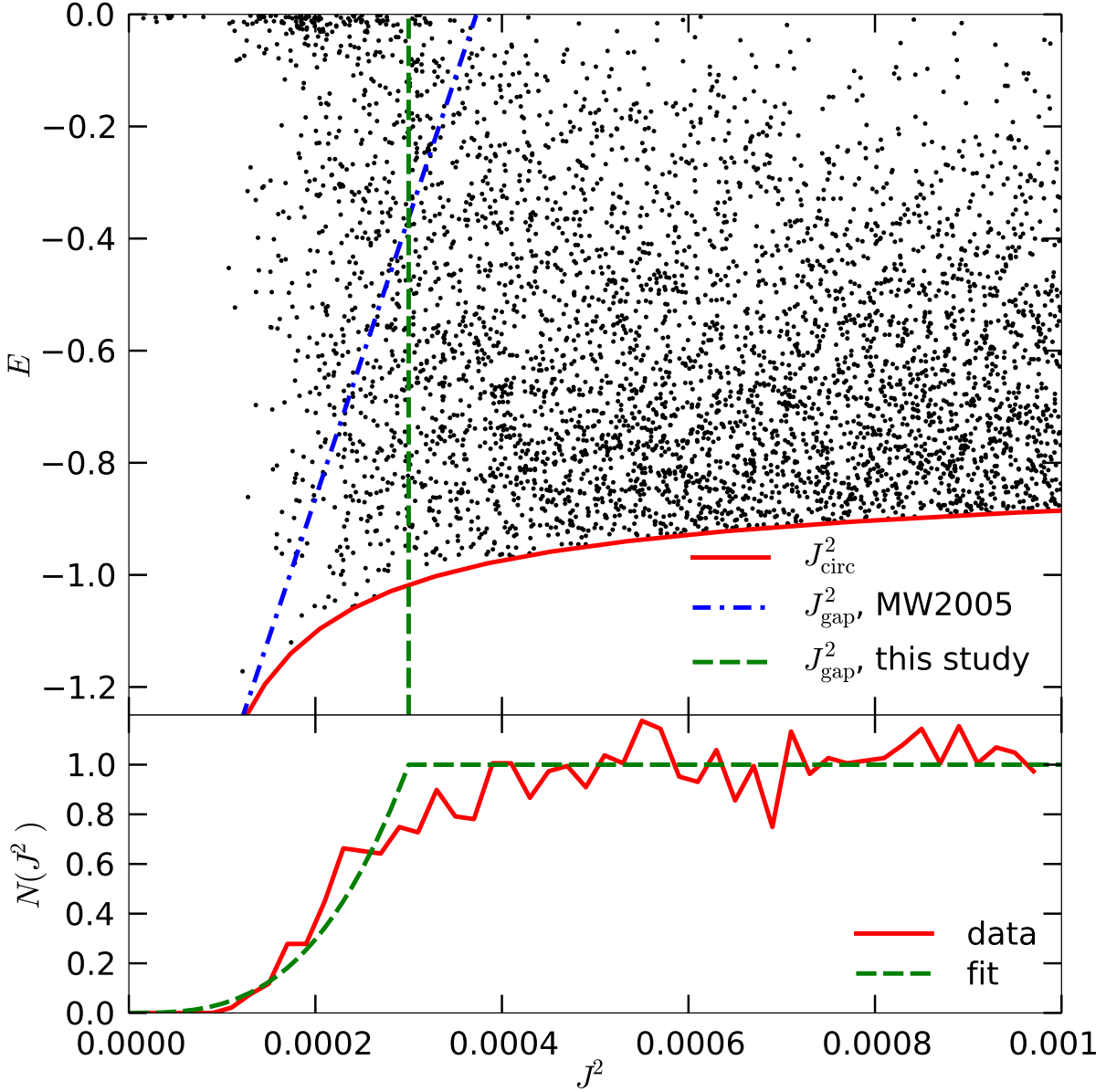


Рис. 1: Монте Карло моделирование двойной SMBH в галактике с профилем плотности Денена с индексом  $\gamma = 1$ . Масса двойной ЧД  $10^{-2}$  от полной массы звезд, отношение масс компонент  $q = 1$ . Двойная ЧД изначально располагается на околокруговой орбите с радиусом приблизительно равным  $r_{\text{infl}}$ .

*Верх:* Фазовое пространство ( $J^2$  vs.  $E$ ) после слияния двойной черной дыры.

*Низ:* Аппроксимация начального распределения по  $J$ , используемая в данной работе.

где  $\tilde{f}(E)$  - изотропизированная функция распределения, метод вычисления которой описан в Cuddeford, 1991.  $\beta$  - коэффициент постоянной в пространстве анизотропии скоростей (уравнение 4.61, Binney & Tremaine, 2008); в случае слабой анизотропии  $\beta = -1/2$ , наблюдаемой в некоторых галактических кластерах (Thomas et al., 2014), изотропизированная функция распределения представляется в виде:

$$\tilde{f}(E) = \frac{J_{\text{circ}}(E)}{3\pi^2} \frac{d^2}{d\Phi^2} \left[ \frac{\rho(\Phi)}{r(\Phi)} \right]. \quad (39)$$

В данной работе рассматривалось семейство  $\gamma$ -моделей Денена (Dehnen, 1993) с массой центральной черной дыры  $M_{\text{bh}} = 10^{-3}M_*$ , где  $M_*$  - масса звездной компоненты галактического центра. Зависящие от энергии части функций распределения  $f(E)$  и  $\tilde{f}(E)$  и соответствующие коэффициенты диффузии  $\mathcal{D}(E)$  вычисляются численно из известных профилей плотности, используя формулу инверсии Эддингтона или ее обобщение (Cuddeford, 1991), соответственно.

Исследовались несколько значений  $\gamma$ -индекса центрального профиля плотности, и для каждого значения  $\gamma$  рассматривалось однопараметрическое семейство моделей с параметром  $M_{\text{bh}}$ . Данное упрощение было сделано с использованием следующих соотношений [MerrittSK2009]:

$$r_{\text{infl}} = r_0 [M_{\text{bh}}/10^8 M_{\odot}]^{0.56}. \quad (40)$$

В качестве нормализации использовалось значение  $r_0 = 30$  парсек, однако также были рассмотрены значения  $r_0 = 20$  и  $45$  парсек.

Результаты вычисления темпов TDE для описанных выше семейств моделей галактик естественно представить в безразмерном виде: поток звезд в



черную дыру, вычисленный из НФП, нормируется на соответствующий стационарный темп, время эволюции нормировано на время релаксации  $T_{\text{rel}}(r_{\text{infl}})$ .

На Рисунке 2, верх, представлены отношения темпов захвата, вычисленные из НФП, к темпам захвата, вычисленным их современных темпов - так называемые "факторы подавления" в зависимости от нормированного времени, для двух представительных моделей с дефицитом орбит с малыми угловыми моментами. В этих же координатах мы строим точки, вычисленные на момент времени  $10^{10}$  лет для моделей с различными  $\gamma$ ,  $M_{\text{bh}}$  и  $q$ .

Время, необходимое для установления квазистационарного профиля в  $J$  при фиксированной энергии звезд  $\sim (J_{\text{gap}}/J_{\text{circ}})^2 T_{\text{rel}}$ ; поскольку большая часть потока звезд в черную дыру обеспечивается энергиями, соответствующими радиусу влияния  $r_{\text{infl}}$ , время компенсации дефицита орбит оценивается приближенно формулой  $T_{\text{refill}} \sim (a_h/r_{\text{infl}}) T_{\text{rel}}(r_{\text{infl}})$ , или

$$T_{\text{refill}} \simeq 10^{13} \text{ yr} \times \frac{q}{4(1+q)^2} \left( \frac{M_{\text{bh}}}{10^8 M_{\odot}} \right)^{1.28} \left( \frac{r_0}{30 \text{ pc}} \right)^{1.5}. \quad (41)$$

Для моментов времени  $tT_{\text{refill}}$ , темп захвата существенно подавлен по сравнению со стационарным значением, обычно используемым для оценок темпов приливного разрушения звезд. Максимальное значение темпа захвата достигается на временах  $t \sim$  несколько ниже чем стационарное значение, в связи с тем что усредненная по  $J$  функция распределения подавлена на больших энергиях связи (где  $\gtrsim$ ) по отношению к ее значениям используемым в вычислении стационарного потока. Поток достигает половины от максимального значения на временах  $t_{1/2} \simeq 0.1 T_{\text{refill}}$ . Более того, для времен  $t \gtrsim T_{\text{refill}}$  поток начинает падать в связи с отсутствием диффузии по энергии. В серии работ Merritt, 2015, были проведено исследование решений двумер-

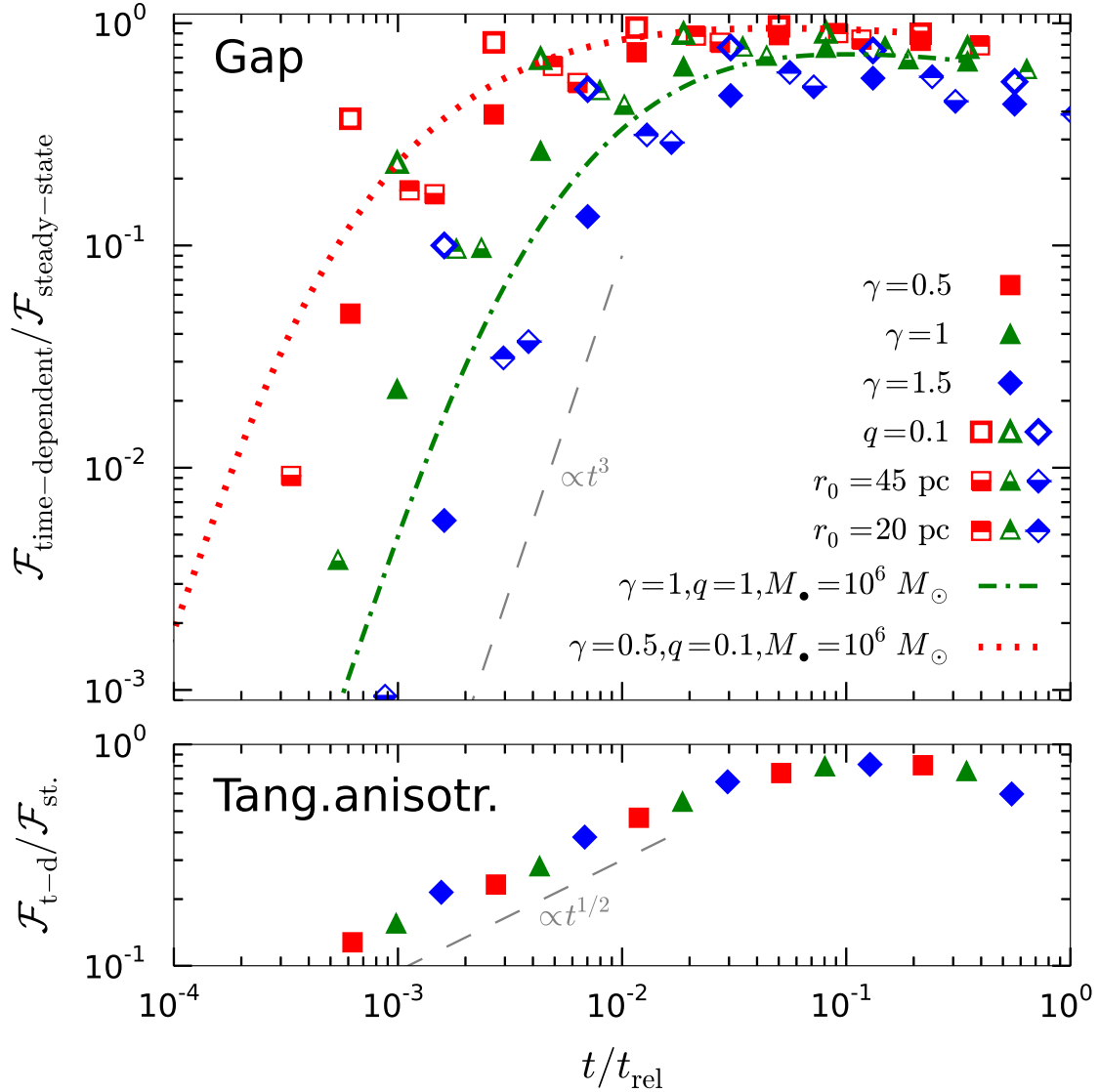


Рис. 2: Факторы подавления как функция времени нормированного на время релаксации на радиусе влияния. Точки отвечают моделям с разными профилями плотности и массам ЧД  $M_{\text{bh}} = 10^6, 10^{6.5}, \dots, 10^8 M_{\odot}$ ; абсцисса отвечает  $T_{\text{H}}$  ( $10^{10}$  лет) в единицах времени релаксации, то есть наиболее массивные ЧД - в левой части графика. *Верх*: семейства моделей с дефицитом орбит с малыми угловыми моментами. Точечные и точечно-пунктирные линии показывают эволюцию потока во времени для конкретного выбора параметров. *Низ*: тангенциально анизотропные модели с  $\beta = -1/2$  для различных  $\gamma$ .

ного  $(E, J)$  уравнения Фоккера–Планка внутри радиуса влияния с учетом дефицита орбит в области  $J < J_{\text{gap}}$ , и было обнаружено похожее поведение в случае "выключения" диффузии по энергии. С другой стороны, учет диффузии по энергиям существенно влияет на решение в случае  $t \gtrsim 0.1 T_{\text{rel}}$  таким образом, что оно действительно стремится к квазистационарному профилю. Таким образом, представленные нами решения справедливы до момента достижения максимума потока.

Нами также был исследован эффект изменения нормализации в соотношении  $r_{\text{infl}} - M_{\text{bh}}$  (Tremaine et al., 2002). Данное изменение модифицирует одновременно и нестационарное значение потока и время релаксации на радиусе влияния, но нормализованные значения остаются на той же кривой для каждого  $\gamma$  и  $q$ .

Наконец, был исследован второй класс моделей тангенциальной анизотропии (Рисунок 2, низ). Было показано, что глобальные тангенциально анизотропные модели дают меньшие значения фактора подавления темпа захвата звезд для времен  $t \lesssim 0.1 T_{\text{rel}}$ .

## 4.2 Вычисления темпов приливного разрушения для реальных галактик

Следующим шагом данной работы было вычисление факторов подавления для реальных профилей плотности галактических центров. Так, в данной работе использовались результаты наблюдений Lauer et al., 2007, где были получены параметры профилей поверхностной светимости  $I(R)$  ( $R$  здесь -

двумерный радиус) для 219 галактик.

Профиль светимости галактик  $I(R)$  можно аппроксимировать разными способами, наиболее известными из которых являются модель Серсика, модель Серсика с ядром и модель Ньюкера (Stone & Metzger, 2016), последняя из которых используется в данной работе:

$$I_N(R) = I_b 2^{(\beta-\gamma)/\alpha} \left( \frac{R}{R_b} \right)^{-\gamma} \left( 1 + \left( \frac{R}{R_b} \right)^\alpha \right)^{-(\beta-\gamma)/\alpha}. \quad (42)$$

Модель Ньюкера представляет из себя степенной профиль с показателем  $\gamma$  при  $R \ll R_b$  и степенной профиль с показателем  $\beta$  при  $R \gg R_b$ , где  $R_b$  - "радиус излома а  $I_b$  - светимость на радиусе излома.

В предположении о сферической симметрии можно получить выражение для трехмерной плотности звезд на радиусе (трехмерном)  $r$  от центра симметрии при помощи инверсии Абеля:

$$\rho_*(r) = -\frac{\gamma}{\pi} \int_r^\infty \frac{dI}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (43)$$

Далее, по профилям плотности, как и в Главе 4.1, возможно получить изотропную функцию распределения звезд с помощью инверсии Эддингтона и произвести вычисление стационарных потоков согласно описанному в Главе 2.2 для сравнения их с результатами Stone & Metzger, 2016. Как было отмечено в последней, не для всех галактических центров существует неотрицательная изотропная функция распределения звезд, так что данные случаи были отброшены в процессе вычислений. Результаты хорошо согласуются с соответствующими результатами полученными независимо в Stone

& Metzger, 2016.

Далее, вычисляем актуальные темпы приливного разрушения (для  $t = 10^{10}$  лет) из НФП-метода, предполагая, что начальное распределение звезд по угловым моментам описывается уравнением 37. Рисунок 3 демонстрирует зависимость факторов подавления от массы центральной черной дыры  $M_{\text{bh}}$ .

Данные вычисления подтверждают результаты Главы 4.1 и Lezhnin & Vasiliev, 2015: в галактиках с  $M_{\text{bh}} \gtrsim 10^{7.5}..10^8 M_{\odot}$  рассмотренное выше подавление темпа приливного разрушения звезд существенно. Однако, в масштабах всей популяции сверхмассивных черных дыр, предположительно доминируемой маломассивными ЧД, эффект подавления не является сильно заметным.

### 4.3 Темпы приливного разрушения звезд в галактиках произвольной геометрии: Монте Карло метод

Поскольку Монте Карло моделирование гораздо более затратное вычислительно, нежели метод Фоккера–Планка, то мы не можем позволить себе исследовать конкретные модели галактик, было сделано в предыдущей Главе в рамках ФП-подхода. Вместо этого мы используем три серии моделей галактических центров с различными геометриями и распределениями звезд в фазовом пространстве.

Подробнее остановимся на начальных условиях для Монте Карло моделирования. В данной Главе, мы берем начальные условия для Монте Карло моделирования с одиночной центральной черной дырой из конечного состо-

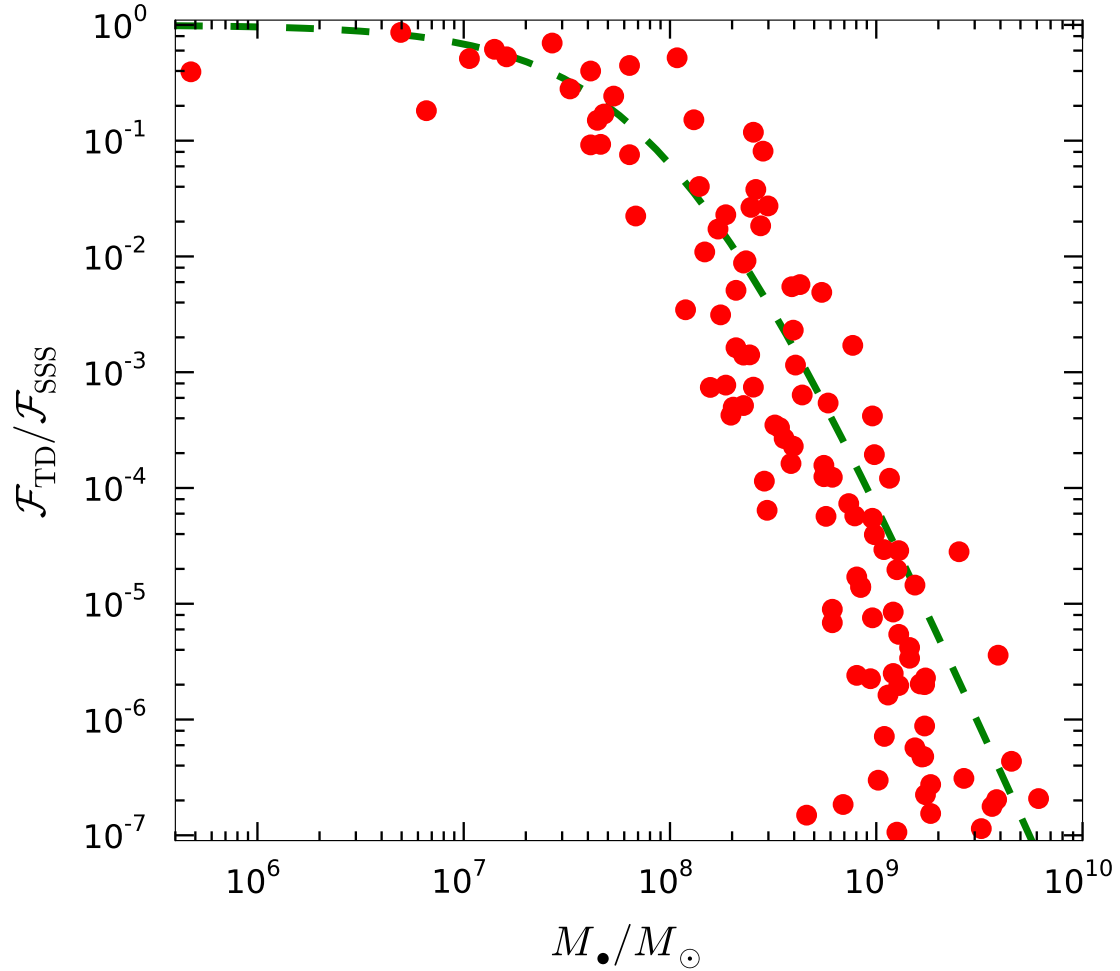


Рис. 3: Факторы подавления  $S$  как функция массы ЧД  $M_{\text{bh}}$ .  $S$  определяется как отношение темпа захвата звезд в НФП методе с анизотропией в  $J$  к той же величине, вычисленной из стационарного уравнения. Точки представляют собой индивидуальные галактики из Lauer et al., 2007. Пунктирная линия – трендлайн  $S \sim (1 + M_{\text{bh}}/10^8 M_{\odot})^{-4}$ , показывает, что подавление существенно для  $M_{\text{bh}} \gtrsim 10^{7.5}..10^8 M_{\odot}$ .

яния моделируемой системы сливающихся двойных ЧД на фоне звездного галактического кластера (Vasiliev, Antonini & Merritt, 2015). В той работе использовался МК-код RAGA для моделирования эволюции двойной ЧД до такого момента сближения, когда потери за счет гравитационных волн становятся достаточно эффективными для слияния двойной ЧД. Также была аккуратно учтена эволюция звездной компоненты. Было проведено моделирование с тремя геометриями звездной системы - сферической, осесимметричной и триаксиальной, начальные условия отвечают профилю плотности Денена с  $\gamma = 1$  и соотношениями полуосей равными 0.8 в случае осесимметричной галактики и 0.9 и 0.8 в случае триаксиальной геометрии. Как было показано в той работе, лишь в последнем случае "эффект рогатки" оставался достаточно эффективным для слияния двойной ЧД за  $T_H$  даже в отсутствие или с пренебрежимо малой парной релаксацией. Таким образом, для сферической и осесимметричной систем, наши начальные условия взяты из конечного состояния моделирования где двойные ЧД были еще далеки от слияния; мы предположили, что некоторые сторонние механизмы, например, газодинамической природы, могли эффективно отнять угловой момент у двойной ЧД и привести ее к слиянию, пренебрегая тем, что в случае окончательного слияния двойная ЧД создала бы еще больший дефицит орбит с малыми угловыми моментами. Также нами не учитывается эффект отдачи слившейся ЧД который выбрасывает ее из центра галактического кластера и предполагаем, что времени существования одиночной ЧД в ядре галактики достаточно для ее "сваливания" в центр за счет динамического трения.

Наши начальные условия отличаются от изначального профиля Денена

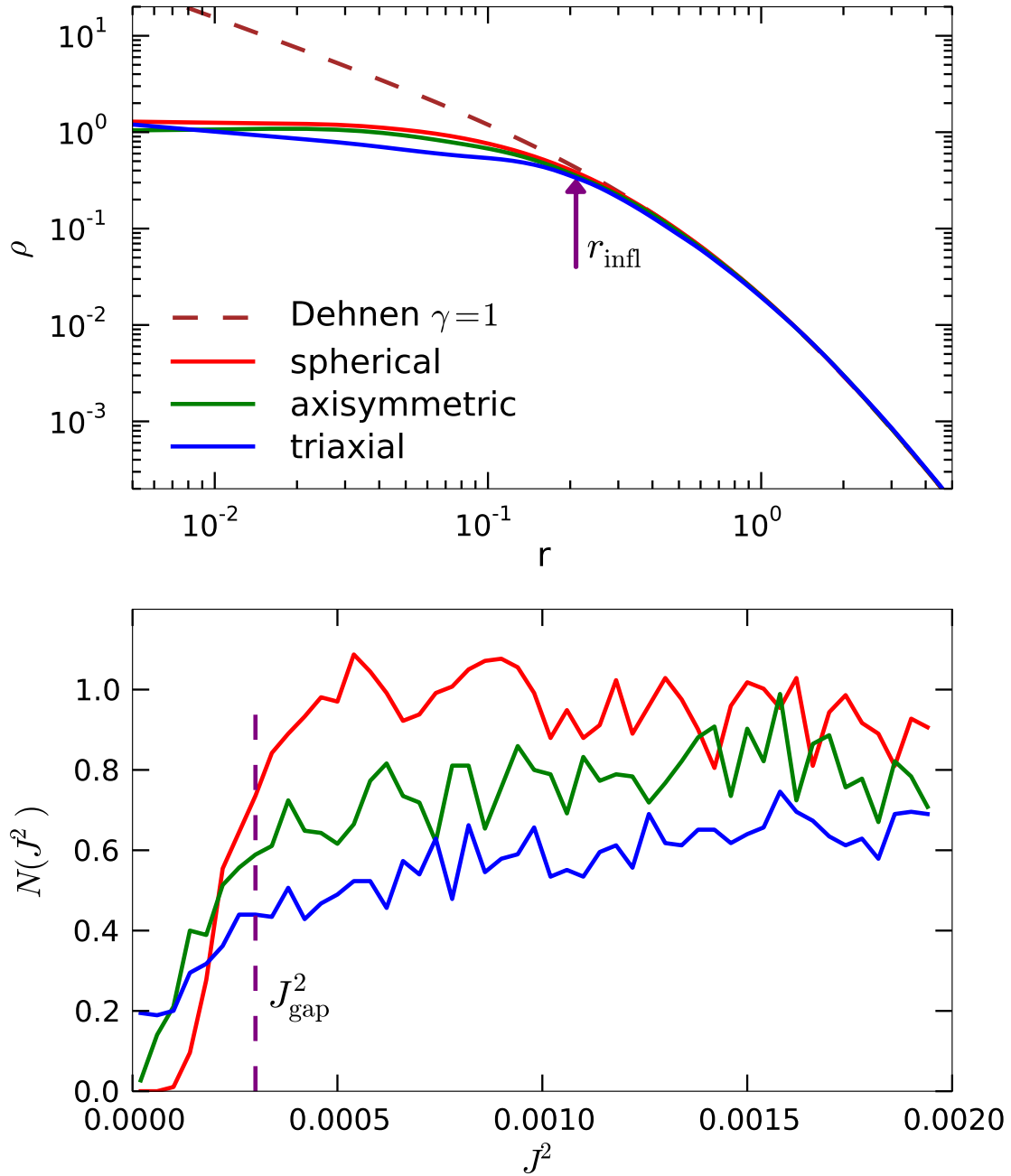


Рис. 4: Начальные условия для наших симуляций в трех разных геометриях, взятые из финального состояния симуляций с двойными ЧД. Верхняя часть демонстрирует усредненные по углам профили плотности. Структура, похожая на ядро ( $\gamma \approx 0$ ), наблюдается внутри радиуса влияния. Нижняя часть демонстрирует распределение звезд по  $J^2$  для трех геометрий.



с  $\gamma = 1$ : в добавок к дефициту орбит с малым  $J$ , он также значительно уплощен к центру, приближаясь к нулевому внутри радиуса влияния (Рисунок 4, верх). Функция распределения на малых  $J$  сильно отличается для трех геометрий: если в сферическом случае явно выделяется зазор с практически нулевым числом частиц внутри, в двух других случаях спад числа частиц идет более плавным образом, но подавление распространяется на большую область в  $J$  (Рисунок 4, низ). Причина заключается в том, что в несферической геометрии звезды взаимодействующие с двойной ЧД в основном приходят с центрофильных орбит, для которых среднее значение  $J$  может быть достаточно велико, но благодаря бесстолкновительным моментам сил они резко теряют угловой момент, приводя к реализации "эффекта рогатки". Начальная система содержала  $N = 0.5 \times 10^6$  частиц, но, для увеличения статистической значимости исследования, был применен метод разбиения больших частиц на малые для 2% частиц с наименьшими угловыми моментами.

Для того, чтобы отделить эффект наличия зазора в угловом моменте от подавления функции распределения в центре, были созданы 'изотропизированные' модели с профилями, повторяющими обсуждаемые выше (Рисунок 4), но с практически изотропным распределением в  $J^2$ . Данные модели были созданы при помощи метода суперпозиции орбит Шварцшильда, реализованные в рамках кода SMILE (Vasiliev, 2013). В дальнейшем производится сравнение темпов захвата звезд для моделей с зазором без звезд и изотропизированных моделей.

В данном разделе мы рассматриваем шесть моделей (три геометрии плюс

изотропные/анизотропные модели) галактик, которые полностью задаются одним параметром - как и в Главе 4.1 и Lezhnin & Vasiliev, 2015, это масса центральной ЧД. Итак, радиус влияния определяется соотношением

$$r_{\text{infl}} = r_0 [M_{\text{bh}}/10^8 M_{\odot}]^{0.56}, \quad r_0 = 35 \text{ pc.} \quad (44)$$

Масса сверхмассивной черной дыры задается равной  $10^6$ ,  $10^7$  и  $10^8 M_{\odot}$ .

Рассмотрим для начала сферические системы, и сравним для них эволюцию темпа захвата для моделей с различной  $M_{\text{bh}}$  и начальным условием по угловым моментам. В случае сферической симметрии также применим и метод Фоккера–Планка, описанный в Главе 3.1 (Lezhnin & Vasiliev, 2015). Несмотря на то, что ФП и МК методы одинаковым образом описывают парную релаксацию, они также имеют существенные отличия. Наиболее важным является самосогласованная эволюция звездной системы в МК подходе; напротив, в ФП методе мы пренебрегаем диффузией по энергии и изменениях в профиле плотности, которые могут быть важны для плотных галактических ядер с малыми временами релаксации. Более того, масса звезд, захваченных ЧД, добавляется к  $M_{\text{bh}}$  в Монте Карло моделировании, хотя обычно данная добавка пренебрежимо мала.

Рисунок 5 демонстрирует темпы приливного разрушения как функцию времени для изотропизированных моделей (верх) и моделей с дефицитом орбит с малым угловым моментом (низ). Для того, чтобы определить темпы приливного разрушения в Монте Карло подходе, использовался метод приближения сплайнами зависимости захваченной массы от времени, которая затем была продифференцирована аналитически, что позволило уменьшить дискретный шум.

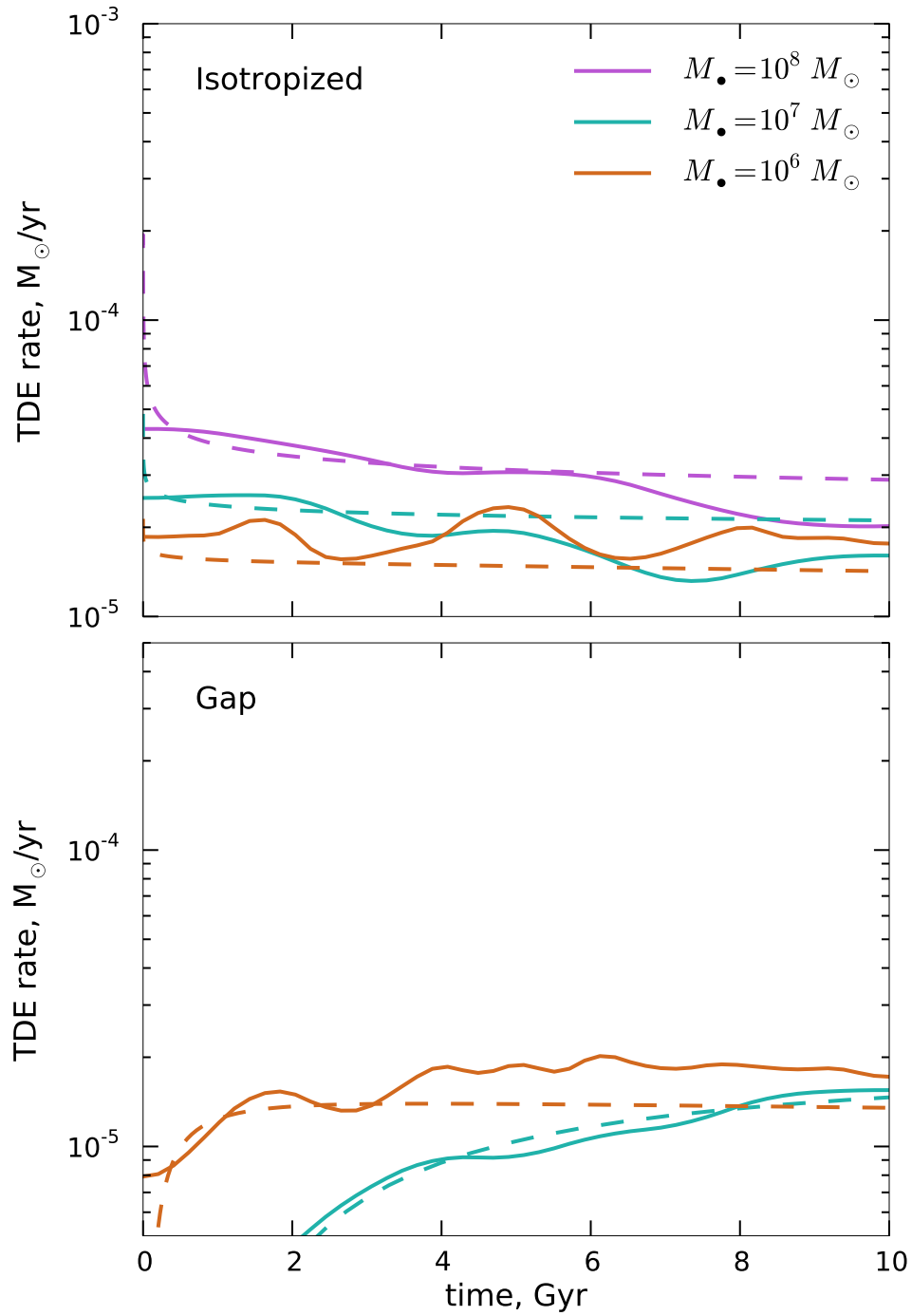


Рис. 5: Зависимость темпов приливного разрушения звезд от времени для изотропизированных (верх) и анизотропных (низ) сферических моделей. Сплошные линии отвечают Монте Карло моделям, пунктирные - из Фоккер-Планк моделей.

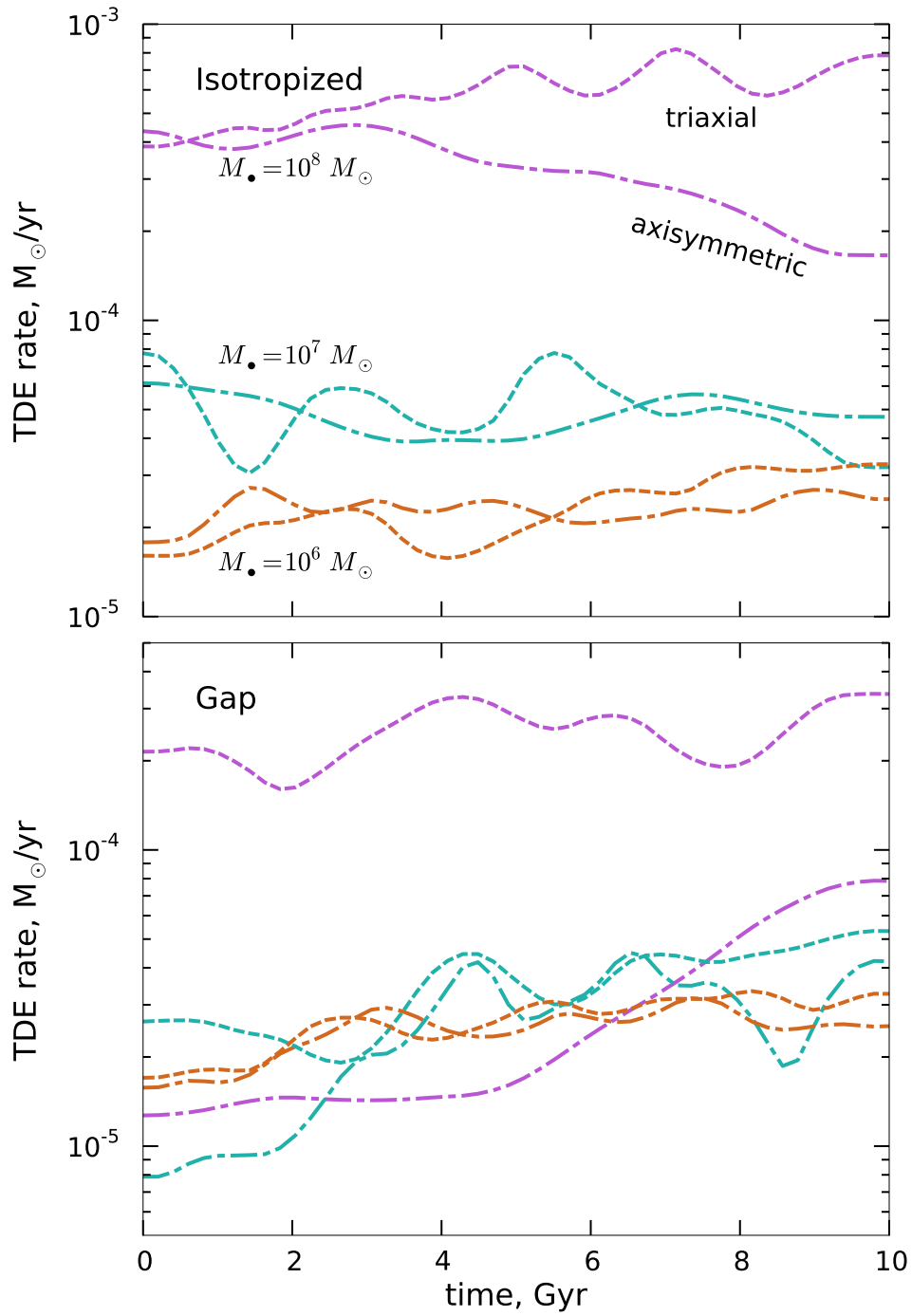


Рис. 6: Зависимость темпов приливного разрушения звезд от времени для осесимметричных и триаксиальных Монте Карло моделей с изотропизированными и анизотропными начальными условиями.

Согласие между ФП и МК моделями весьма хорошее, хотя есть и расхождения. Для  $M_{\text{bh}} = 10^6 M_{\odot}$ , диффузия по энергии играет важную роль на времени Хаббла, что приводит к "отращиванию" каспа с параметром наклона  $\gamma \sim 1$ , что все еще меньше чем полностью релаксированное решение Бахкала-Вулфа (Bahcall & Wolf, 1976). Подобный рост центральной плотности приводит к возрастанию темпов захвата на более поздних временах в МК моделировании по сравнению с ФП. Для  $M_{\text{bh}} \geq 10^7 M_{\odot}$  изменения в центральной плотности незначительны, и основные расхождения темпов связаны с дискретными флуктуациями.

Сравнения сферических моделей с и без дефицита орбит показали, что для  $M_{\text{bh}} \geq 10^7 M_{\odot}$  подавление становится важным, причем для  $M_{\text{bh}} = 10^8 M_{\odot}$  в Монте Карло моделировании ни одна частица не была захвачена за все время моделирования.

Для несферических систем естественно ожидать, что темпы захвата звезд будут выше. Во-первых, начальная функция распределения не настолько сильно подавлена на малых  $J$  (Рисунок 4, низ). Во-вторых, хотя парная релаксация не очень сильно зависит от геометрии, поток звезд в центральную ЧД выше по следующим причинам. Первая - наличие популяции центрофильных орбит, которые служат в качестве "расширения" конуса потерь - звезды на таких орбитах, даже имея начальный угловой момент  $J \gg J_{\text{LC}}$ , в конце концов достигнут конуса потерь за счет наличия бесстолкновительных моментов сил (хотя звезда и не обязана проходить перицентр в момент когда  $J < J_{\text{LC}}$ ). Таким образом, "задача" парной релаксации заключается в доставке звезд в этот расширенный конус потерь, а бесстолкновительные моменты

сил окончательно доставят звезду в конус потерь. Другая причина - даже в отсутствие релаксации, изначальное число звезд на центрофильных орбитах достаточно существенно, особенно в случае триаксиальной геометрии, для поддержания высокого "темпа проваливания" звезд в течение долгого времени – возможно, даже большего, чем время Хаббла. Данный вклад в полный темп захвата звезд доминирует в случае триаксиальной геометрии с массой ЧД  $M_{\text{bh}} \gtrsim 10^8 M_{\odot}$  (Vasiliev, 2014). Для анизотропных моделей популяция центрофильных орбит несколько подавлена.

Рисунок 6 демонстрирует зависимость темпов захвата в осесимметричных и триаксиальных МК моделях с изотропным (верх) и анизотропным (низ) распределением звезд по  $J$ . Результаты подтверждают описанную выше картину: разница в трех геометриях проявляется с увеличением массы ЧД (и, как следствие, увеличении времени релаксации), так как проваливание центрофильных орбит становится все более важным. Более того, подавление темпов захвата в анизотропных моделях существенно лишь в сферическом случае и заметно на ранних стадиях в осесимметричных моделях с  $M_{\text{bh}} \gtrsim 10^7 M_{\odot}$ . Рисунок 7 резюмирует актуальные темпы приливного разрушения звезд (усредненные за последние два гигагода) для всех моделей.

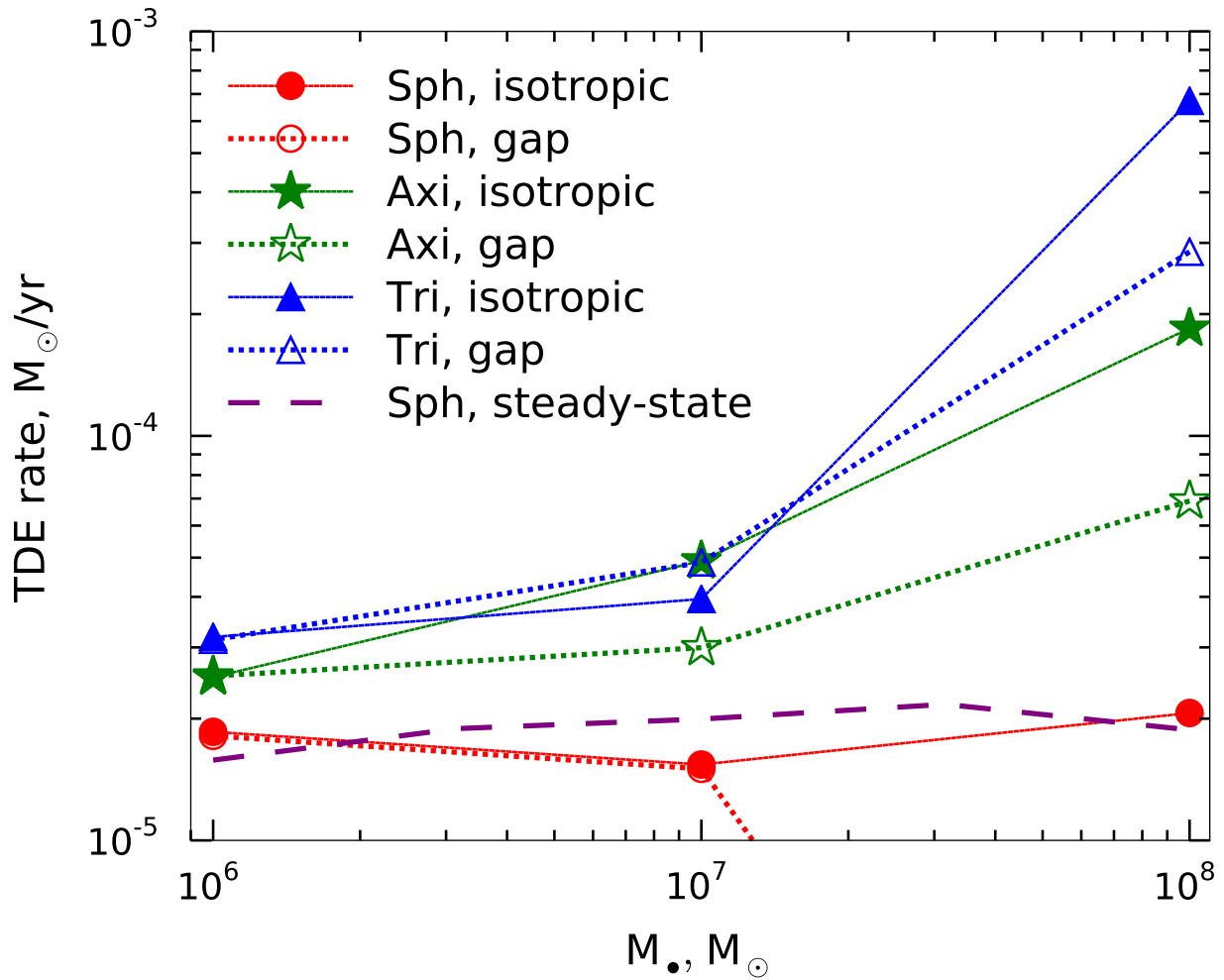


Рис. 7: Актуальные темпы приливного разрушения в зависимости от массы ЧД  $M_{\text{bh}}$  для моделей различных геометрий и начальных условий по  $J$ . Фиолетовая пунктирная линия отвечает стационарным значениям темпа приливного разрушения из стационарного уравнения ФП.

## 5 Заключение и обсуждение

В данной работе было приведено обзорное описание теории конуса потерь, численных методов, использующихся для более реалистичной оценки темпов приливного разрушения и, наконец, был предложен метод разрешения проблемы расхождения наблюдательных и теоретических темпов приливного разрушения звезд в галактических центрах. Особо подробно была рассмотрена игра параметров анизотропии и геометрии галактических центров и их влияние на темпы приливного разрушения.

Наши главные результаты можно сформулировать следующим образом.

- В случае сферических систем, с помощью метода одномерного Фоккер–Планк уравнения с анизотропными начальными условиями было показано, что темпы приливного разрушения звезд существенно подавляются за счет дефицита орбит с малыми  $J$  для набора модельных галактик с  $M_{\text{bh}} \gtrsim 10^7 M_{\odot}$ .
- В рамках того же подхода были произведены вычисления для реальных галактик из Lauer et al., 2007, в предположении о наличии дефицита орбит с малыми  $J$ . Показано, что подавление темпов захвата звезд существенно для галактик с  $M_{\text{bh}} \gtrsim 10^{7.5} M_{\odot}$ , подтверждая наши вычисления на более произвольном наборе реальных галактик.
- В случае сферических систем было произведено сравнение эволюции темпов приливного разрушения звезд, вычисленных из Фоккер–Планк и Монте Карло подходов. Результаты сравнения оказались удовлетво-



рительными, в очередной раз подтверждая наши вычисления в рамках Фоккер–Планк подхода и подчеркивая ограничения его применимости.

- Истощение орбит с малыми угловыми моментами за счет "эффекта рогатки" менее выражено в несферических системах по сравнению со сферическими.
- Разница между изотропными и анизотропными начальными условиями и разными геометриями проявляется в случае  $M_{\text{bh}} \gtrsim 10^{7.5} M_{\odot}$ . Кроме того, влияние дефицита орбит менее заметно в несферической геометрии, и соответствующие темпы приливного разрушения оказываются существенно больше стационарного значения ( $\sim 2 \times 10^{-5} M_{\odot}/\text{год}$  в случае нашей нормировки) для всех масс ЧД и начальных условий.
- Эффект тангенциальной анизотропии может быть лишь малым фактором в разрешении проблемы расхождения наблюдательных и теоретических темпов приливного разрушения звезд, поднятой в Stone & Metzger, 2016, так как большая часть событий приливного разрушения звезд ожидается от маломассивных галактик с массами ЧД ниже нашего пограничного значения  $M_{\text{bh}} \approx 10^{7.5} M_{\odot}$ . Таким образом, разрешение данной проблемы может лежать вне динамической природы и заключаться, например, в свойствах излучения событий приливного разрушения (например, Metzger & Stone, 2015).

Отметим, наконец, что простейшие оценки темпов приливного разрушения звезд в предположениях о сферической геометрии, стационарности и изотропных начальных условиях, повсеместно используемых в литературе,

должны пониматься как нижняя грань темпа приливного разрушения звезд в галактиках, сформировавшихся за счет слияния, поскольку эффект анизотропии гиперкомпенсируется эффектами несферичности.

# Литература

1. J. Kormendy, L.C. Ho "Coevolution (Or Not) of Supermassive Black Holes and Host Galaxies arXiv:astro-ph/1304.7762 (2013)
2. A.W. Graham "Galaxy bulges and their massive black holes: a review", arXiv:astro-ph/1501.02937 (2015)
3. C. Bambi "Can the supermassive objects at the centers of galaxies be traversable wormholes? The first test of strong gravity for mm/sub-mm VLBI facilities", Phys. Rev. D, **87**, 107501 (2013)
4. Z. Li, C. Bambi "Distinguishing black holes and wormholes with orbiting hot spots", Phys. Rev. D, **90**, 024071 (2014)
5. A. Marconi and L.K. Hunt "The relation between black hole mass, bulge mass, and near-infrared luminosity", ApJ, **589**, L21–L24 (2003)
6. Y.Y. Kovalev, M.L. Lister, D.C. Homan, and K.I. Kellermann "The inner jet of the radio galaxy M87", ApJ, **668**, L27–L30 (2007)
7. S. Sazonov, M. Revnivtsev, R. Krivonos, E. Churazov, and R. Sunyaev "Hard X-ray luminosity function and absorption distribution of nearby AGN: INTEGRAL all-sky survey", Astronomy & Astrophysics, **462**, 57-66 (2007)
8. R. U. Abbasi, M. Abe, T. Abu-Zayyad, M. Allen et al. "A northern sky survey for point-like sources of EeV neutral particles with the telescope array experiment", ApJ, **804**, 133 (2015)

9. M. Rees "Tidal disruption of stars by black holes of  $10^6 - 10^8$  solar masses in nearby galaxies", *Nature*, **333**, 523 (1988)
10. S. Komossa "Tidal disruption of stars by supermassive black holes: Status of observations", *Journal of High Energy Astrophysics*, **7**, 148–157 (2015)
11. M. Freitag & W. Benz , *Astronomy & Astrophysics*, **394**, 345-374 (2002)
12. H. Zhao, M. G. Haehnelt, M. J. Rees "Feeding black holes at galactic centres by capture from isothermal cusps", *New Astronomy*, **7**, 385-394 (2002)
13. G. Lodato, A. Franchini, C. Bonnerot, E.M. Rossi "Recent developments in the theory of tidal disruption events", *Journal of High Energy Astrophysics*, **7**, 158–162 (2015)
14. N.C. Stone & B.D. Metzger "Rates of stellar tidal disruption as probes of the supermassive black hole mass function", *MNRAS*, **455**, 859-883 (2016)
15. S. Komossa & D. Merritt "Tidal Disruption Flares from Recoiling Supermassive Black Holes", *ApJL*, **683**, L21–L24 (2008)
16. T. Alexander "Relativistic Stellar Dynamics Around a Massive Black Hole in Steady State", *arXiv:1505.04823*
17. A. P. Lightman & S. L. Shapiro "The dynamical evolution of globular clusters", *Review of Modern Physics* **50**, 437 (1978)
18. D. Merritt "Loss cone dynamics", *Classical and Quantum Gravity*, **30** 244005 (2013)

19. W. Dehnen & J. I. Read "N-body simulations of gravitational dynamics", The European Physical Journal Plus, **126**, 55 (2011)
20. J. N. Bahcall & R. A. Wolf "Star distribution around a massive black hole in a globular cluster", ApJ, **209**, 214 (1976)
21. H. Cohn & R. M. Kulsrud "The stellar distribution around a black hole - Numerical integration of the Fokker-Planck equation", ApJ, **226**, 1087 (1978)
22. K. Lezhnin & E. Vasiliev "Suppression of stellar tidal disruption rates by anisotropic initial conditions", ApJL, **808**, L5 (2015)
23. H. B. Perets, C. Hopman, and T. Alexander "Massive Perturber-driven Interactions between Stars and a Massive Black Hole", ApJ, **656**, 509 (2007)
24. Eugene Vasiliev "Rates of capture of stars by supermassive black holes in non-spherical galactic nuclei", Classical and Quantum Gravity, **31**, 24 (2014)
25. B. Tremblay & D. Merritt "Evidence From Intrinsic Shapes for Two Families of Elliptical Galaxies", Astronomical Journal, **111**, 2243 (1996)
26. S. Sridhar & J. Touma "Stellar dynamics around black holes in galactic nuclei", MNRAS, **303**, 483-494 (1999)
27. D. Merritt & E. Vasiliev "Orbits around black holes in triaxial nuclei", Astrophysical Journal, **726**, 61 (2011)
28. E. Vasiliev & D. Merritt "The loss-cone problem in axisymmetric nuclei", Astrophysical Journal, **774**, 87 (2013)

29. A. P. Lightman & S. L. Shapiro "The distribution and consumption rate of stars around a massive, collapsed object", *Astrophysical Journal*, **211**, 244-262 (1977)
30. H. Cohn & R. M. Kulsrud "The stellar distribution around a black hole - Numerical integration of the Fokker-Planck equation", *Astrophysical Journal*, **226**, 1087-1108 (1978)
31. J. Magorrian & S. Tremaine "Rates of tidal disruption of stars by massive central black holes", *MNRAS* **309**, 447-460 (1999)
32. D. Merritt "Gravitational Encounters and the Evolution of Galactic Nuclei. I. Method", *The Astrophysical Journal*, **804**, 52 (2015)
33. D. Merritt "Gravitational Encounters and the Evolution of Galactic Nuclei. II. Classical and Resonant Relaxation", *The Astrophysical Journal*, **804**, 128 (2015)
34. D. Merritt "Gravitational Encounters and the Evolution of Galactic Nuclei. III. Anomalous Relaxation", *The Astrophysical Journal*, **810**, 2 (2015)
35. D. Merritt "Gravitational Encounters and the Evolution of Galactic Nuclei. IV. Captures Mediated by Gravitational-wave Energy Loss", *The Astrophysical Journal*, **814**, 57 (2015)
36. M. N. Ozisik "Heat conduction fundamentals", New York: Wiley. (1980)
37. M. Milosavljević & D. Merritt "Long-term evolution of massive black hole binaries", *Astrophysical Journal*, **596**, 860 (2003)

38. D.C. Heggie "Towards an N-body model for the globular cluster M4", MNRAS, **445**, 3435-3443 (2014)
39. M. Brockamp, H. Baumgardt, and P. Kroupa "Tidal disruption rate of stars by supermassive black holes obtained by direct N-body simulations", MNRAS **418**, 1308-1324 2014
40. S. Zhong, P. Berczik, and R. Spurzem "Super massive black hole in galactic nuclei with tidal disruption of stars", Astrophysical Journal **792**, 137 (2014)
41. S. Zhong, P. Berczik, and R. Spurzem "Super massive black hole in galactic nuclei with tidal disruption of stars. II. Axisymmetric nuclei", Astrophysical Journal, **811**, 22 (2015)
42. Eugene Vasiliev "A new Monte Carlo method for dynamical evolution of non-spherical stellar systems", MNRAS, **446**, 3150-3161 (2015)
43. L. Hernquist & J.P. Ostriker "A self-consistent field method for galactic dynamics", Astrophysical Journal, **386**, 375-397 (1992)
44. N. C. Stone, S. van Velzen "An enhanced rate of tidal disruptions in the centrally overdense E+A galaxy NGC 3156", arXiv:1604.02056 (2016)
45. D. Merritt & J. Wang "Loss cone refilling rates in galactic nuclei", Astrophysical Journal Letters, **621**, L101 (2005)
46. T. R. Lauer, K. Gebhardt, S. M. Faber, D. Richstone, S. Tremaine, J. Kormendy, M. C. Aller, R. Bender, A. Dressler, A. V. Filippenko "The

- Centers of Early-Type Galaxies with Hubble Space Telescope. VI. Bimodal Central Surface Brightness Profiles", *Astrophysical Journal*, **664**, 226 (2007)
47. W.C. Saslaw, M.J. Valtonen, and S.J. Aarseth "The Gravitational Slingshot and the Structure of Extragalactic Radio Sources", *Astrophysical Journal*, **190**, 253-270 (1974)
48. M. Milosavljević & D. Merritt "Formation of Galactic Nuclei", *Astrophysical Journal*, **563**, 34 (2001)
49. D. Merritt "Mass Deficits, Stalling Radii, and the Merger Histories of Elliptical Galaxies", *Astrophysical Journal*, **648**, 976 (2006)
50. B. T. Dullo & A. W. Graham "Sizing up partially depleted galaxy cores", *Astrophysical Journal*, **755**, 163 (2012)
51. E. Vasiliev, F. Antonini, and D. Merritt "The final-parsec problem in the collisionless limit", *Astrophysical Journal*, **810**, 49 (2015)
52. P. Cuddeford "An analytic inversion for anisotropic spherical galaxies", *MNRAS*, **253**, 414-426 (1991)
53. J. Binney & S. Tremaine "Galactic dynamics", 2nd edition, Princeton University Press (2008)
54. J. Thomas, R. Saglia, R. Bender, P. Erwin, M. Fabricius "The dynamical fingerprint of core scouring in massive elliptical galaxies", *Astrophysical Journal*, **782**, 39 (2014)



55. W. Dehnen "A family of potential–density pairs for spherical galaxies and bulges", MNRAS, **265**, 250-256 (1993)
56. D. Merritt, J. Schnittman, S. Komossa "Hypercompact stellar systems around recoiling supermassive black holes", Astrophysical Journal, **699**, 1690 (2009)
57. S. Tremaine, K. Gebhardt, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber, Alexei V. Filippenko, R. Green, C. Grillmair, L. C. Ho, J. Kormendy, T. R. Lauer, J. Magorrian, J. Pinkney, and D. Richstone "The Slope of the Black Hole Mass versus Velocity Dispersion Correlation", **574**, 740 (2002)
58. Eugene Vasiliev "A new code for orbit analysis and Schwarzschild modelling of triaxial stellar systems", MNRAS, **434**, 3174-3195 (2013)
59. B.D. Metzger & N.C. Stone "A Bright Year for Tidal Disruptions?", arXiv:1506.03453 (2015)