

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем физики и астрофизики

На правах рукописи

УДК 52-423

КУСКОВ ДМИТРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

**Динамическое трение в системах
гравитационно связанных частиц**

Магистерская диссертация

Направление подготовки 010900 Прикладные математика и физика
Магистерская программа 010613 Проблемы теоретической физики (астрофизика)

Заведующий кафедрой _____ академик РАН Гуревич А. В.

Научный руководитель _____ к. ф.-м. н. Зельников М. И.

Студент _____ Кусков Д. С.

г. Москва
2014 г.

Содержание

1	Введение	2
1.1	Динамическое трение	2
1.2	Постановка задачи	3
1.3	Метод вычисления	3
2	Динамическое трение в однородной сфере	7
2.1	Используемая модель	7
2.2	Возмущенные траектории звёзд	8
2.3	Потери энергии чёрной дырой	12
3	Численные вычисления потерь энергии	16
3.1	Модель вычислений	16
3.2	Результаты вычисления	17
4	Выводы	23
4.1	Квадратичная зависимость трения от времени	23
4.2	Сверх-чандрасекаровское трение	24
4.3	Потеря трения после первичного затухания	24
4.4	Окончательное затухание	25
5	Заключение	25
6	Литература	25

1 Введение

1.1 Динамическое трение

Впервые эффект так называемого “динамического трения” был рассмотрен Чандрасекаром в его в работе [1]. Им была рассмотрено движение тяжелой частицы массы M через бесконечную однородную среду из лёгких невзаимодействующих друг с другом и не сталкивающихся частиц. При этом движении массивная частица своим гравитационным полем изменяет траектории лёгких частиц, передавая им часть своего импульса:

$$M \frac{dV}{dt} = -\frac{4\pi G^2 M^2}{V^2} \ln \Lambda \rho(< V). \quad (1)$$

где V — это скорость тяжелого объекта, $\rho(< V)$ — плотность частиц со скоростями меньшими, чем V , а $\Lambda = p_{\max}/p_{\min}$. Величины p_{\max} и p_{\min} характеризуют максимальное и минимально взаимодействие лёгких частиц с тяжелой. Обычно $p_{\max} \approx L$, где L — это размер системы, а $p_{\min} \approx \max(Gm/V^2, l)$, где l — размер объекта, а m — масса лёгкой частицы [2]. Динамическое трение может быть качественно понято как появление “хвоста” повышенной плотности за массивным объектом. Этот хвост притягивает к себе движущийся объект и уменьшает его скорость [3].

Динамическое трение играет большую роль в движении галактик в скоплениях, чёрных дыр, шаровых скоплениях в галактиках и т.д. В частности, динамическое трение играет основополагающую роль в затухании движения чёрной дыры, образовавшейся в результате слияния двух чёрных дыр в центре галактики. В работах [4, 5, 6] показано, что при таком слиянии из-за несимметричного излучения гравитационных волн чёрная дыра может обладать большой начальной скоростью. В работе Gualandris & Merritt [7] с помощью численного моделирования исследуется движение выброшенной из центра галактики сверхмассивной чёрной дыры. Такая ситуация является хорошим примером системы с динамическим трением в системе гравитационно связанных частиц, поэтому мы выбрали её для исследования в данной работе. В дальнейшем мы будем называть массивный объект чёрной дырой, а лёгкие частицы — звёздами.

Полученная при довольно простых предположения формула Чандрасекара (1) хорошо описывает трение во многих более общих случаях. Например, при движении массивного объекта в неоднородных средах с распределением скоростей, отличным от максвелловского, после поправки выражения для кулоновского логарифма $\ln \Lambda$ и для плотности (с учётом её изменения вдоль траектории и влияния быстрых звезд) [8, 9]. После поправки для учёта анизотропии распределения по скоростям формула Чандрасекара хорошо описывает и несферические системы [10].

Однако было выяснено, что данная формула перестаёт работать при описании движения чёрной дыры в ядрах некоторых галактик. Так, Gualandris & Merritt [7] рассматривали движение чёрной дыры в галактике с плотностью в ядре $\rho \approx r^{-\gamma}$, $\gamma = 0.55$. Ими было обнаружено, что после стадии с трением, описываемой форму-

лой Чандрасекара, начинается стадия, на которой трение намного ниже предсказываемого. Аналогичные результаты для галактики с постоянной в центре плотностью получены в работе Inoue [11]. Динамическое трение в ядрах с практически постоянной плотностью было исследовано также в работе Read et al. [12]. Они выяснили, что в таких ядрах фазу со сверхчандрасекаровским трением сменяет фаза, в которой трение практически отсутствует.

При этом динамическое трение в ядре постоянной плотности может быть интересно в связи с тем, что гало темной материи может иметь практически постоянную плотность в центре, как показано, например, в работе Kleyna et al. [13].

1.2 Постановка задачи

В работе Tremaine & Weinberg [14] показано, что при движении в системе гравитационно связанных частиц (галактике) основным источником динамического трения являются частицы, движущиеся с орбитальной частотой, близкой к частоте чёрной дыры. Поэтому нашей целью будет изучение системы, в которой число таких частиц максимально. Самой простой из таких систем является сфера постоянной плотности. Орбитальная частота всех частиц в данной сфере является одинаковой. Таким образом, движение всех звёзд происходит в резонансе с орбитальным движением чёрной дыры. Метод расчёта динамического трения, разработанный Tremaine & Weinberg [14] и Weinberg [15], не может быть применён в данном случае, так как резонанс со всеми звёздами привёл бы к бесконечно большому трению. Этот вопрос обсуждается в работе [12]. Нами будет показано, что при рассмотрении действия чёрной дыры на отдельные звезды в сфере постоянной плотности, задача может быть решена аналитически в некотором приближении.

Таким образом, мы рассмотрим динамическое трение в галактике, представляющей из себя однородную сферу. В продолжении этой главы мы в качестве примера выведем формулу Чандрасекара для динамического трения в бесконечной однородной бесстолкновительной среде методом, который будет в дальнейшем использован для нашей модели. В главе 2 мы рассмотрим динамическое трение в однородной сфере аналитически. В главе 3 приведены результаты численно моделирования движения чёрной дыры в данной модели и их сравнение с аналитическими результатами. Глава 4 содержит выводы.

1.3 Метод вычисления

В данной работе динамическое трение вычисляется с помощью теории возмущений. Для проверки нашего метода получим выражение для трения, которое испытывает чёрная дыра массы M , двигаясь в бесконечном однородном поле невзаимодействующих друг с другом звезд массы m . В первом приближении мы будем считать, что скорость чёрной дыры постоянна и равна V . Здесь и далее мы будем обозначать

положение, скорость, импульс и массу звёзд символами \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{p} и m , а соответствующие параметры чёрной дыры символами \mathbf{R} , \mathbf{V} , \mathbf{P} и M . Наша цель — воспроизвести известную формулу Чандрасекара (1).

Для того, чтобы использовать теорию возмущений, необходимо предположить, что влияние чёрной дыры на звезду мало. Таким образом, мы предполагаем отсутствие близких пролётов или столкновений. Данное условие всегда можно считать выполненным при недостаточно большой плотности звезд.

Для начала найдём возмущенные под действием чёрной дыры траектории звезд. Без возмущения траектории описываются уравнениями Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \quad (2)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$, а H — гамильтониан системы.

После внесения в гамильтониан возмущения $H_1 = H + V$ будем искать решение в таком же виде, однако будем считать, что начальные параметры являются функциями времени: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, t)$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, t)$. Тогда уравнения Гамильтона для H_1 с учётом уравнений (2) будут иметь вид:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_0} \frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}} \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}_0} \frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4)$$

В рассматриваемом в данный момент случае гамильтониан равен

$$H = \frac{p^2}{2m}, \quad (5)$$

а возмущение в Ньютоновском пределе имеет вид:

$$V = -\frac{GmM}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}. \quad (6)$$

Невозмущенные траектории звёзд описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}_0}{m}t \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_0, \end{aligned} \quad (7)$$

а чёрной дыры —

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_0 + \frac{\mathbf{P}_0}{M}t \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0, \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (7) в (3) и (4), принимая во внимание (6) и (8), мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{t}{m}\dot{\mathbf{p}}_0 &= 0 \\ \dot{\mathbf{p}}_0 &= GMm \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \end{aligned} \quad (9)$$

которые могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}} &= GM \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \frac{1}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}t|}, \\ \dot{\mathbf{b}} &= -GM \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \frac{1}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}t|},\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{p}_0}{m} - \frac{\mathbf{P}_0}{M}\end{aligned}\quad (11)$$

— положение и импульс звезды в системе отсчёта, связанной с чёрной дырой. Из (10) можно с лёгкостью получить, что угловой момент в этой системе сохраняется:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \quad (12)$$

Уравнения (10) — это уравнения Гамильтона с гамильтонианом $GM|\mathbf{a} + \mathbf{b}t|^{-1}$, зависящим от времени. Рассмотрим теперь движение звезды, усреднённое по большому интервалу времени $2T$ (оно соответствует усреднению по орбитальному периоду в разделе 2.2). Гамильтониан после усреднения принимает вид:

$$I(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{GM}{2T} \int_{-T}^T \frac{dt}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}t|} = \frac{GM}{2T|b|} \ln \frac{4b^4 T^2}{[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^2}. \quad (13)$$

Позже мы предположим, что $T \rightarrow \infty$. В результате мы получаем обычную гамильтонову систему:

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\partial I}{\partial \mathbf{b}}; \quad \dot{\mathbf{b}} = -\frac{\partial I}{\partial \mathbf{a}} \quad (14)$$

Из (10) и (13) следует, что

$$\dot{\mathbf{b}} = -\frac{GM}{T} \frac{[\mathbf{b} \times \mathbf{L}]}{|\mathbf{b}|L^2}. \quad (15)$$

Умножение этого уравнения скалярно на \mathbf{b} ведет к $\dot{\mathbf{b}}^2 = 0$, следовательно $|\mathbf{b}| = \text{const}$. Поэтому уравнение (15) является просто уравнением вращения

$$\dot{\mathbf{b}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b}] \quad (16)$$

и

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{GM}{T} \frac{\mathbf{L}}{|\mathbf{b}|L^2} = \text{const} \quad (17)$$

Осью вращения является $\mathbf{n} = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$, а полный угол поворота за всё время равен

$$\theta = 2T\Omega = \frac{2GM}{|\mathbf{b}||\mathbf{L}|}. \quad (18)$$

Таким образом, решением уравнения (15) является

$$\mathbf{b}_{\text{final}} = \mathbf{O}(\theta)\mathbf{b}_0, \quad (19)$$

где $\mathbf{O}(\theta)$ — матрица поворота на угол θ вокруг вектора $\mathbf{n} = (x, y, z)$:

$$\mathbf{O}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta)x^2 & -\sin \theta z + (1 - \cos \theta)xy & \sin \theta y + (1 - \cos \theta)xz \\ \sin \theta z + (1 - \cos \theta)xy & \cos \theta + (1 - \cos \theta)y^2 & -\sin \theta x + (1 - \cos \theta)yz \\ -\sin \theta y + (1 - \cos \theta)xz & \sin \theta x + (1 - \cos \theta)yz & \cos \theta + (1 - \cos \theta)z^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Переходя к исходным обозначениям, мы получим

$$\mathbf{v}_{\text{final}} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{O}(t)(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0), \quad (21)$$

За счёт взаимодействия с чёрной дырой звезда получает энергию

$$\Delta E = \frac{n}{2}(\mathbf{v}_{\text{final}}^2 - \mathbf{v}_0^2) = m(\mathbf{V}_0 \cdot (\mathbf{O}(\theta) - \mathbf{1})(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0)), \quad (22)$$

которая, с учётом вида матрицы поворота, может быть переписана в виде

$$\frac{\Delta E}{m} = \sin \theta \frac{(\mathbf{V}_0 \cdot [\mathbf{L} \times (\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0)])}{|\mathbf{L}|} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0) \quad (23)$$

Так как распределение звёзд однородно и бесконечно, результат не может зависеть от начального положения чёрной дыры. Поэтому, не ограничивая общности, положим $\mathbf{R}_0 = 0$ и тогда $\mathbf{L} = [\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0)]$. Величина θ не зависит от знака \mathbf{r}_0 , поэтому после усреднения по \mathbf{r}_0 первое слагаемое исчезает и мы получаем:

$$\Delta E = m(1 - \cos \theta)(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0) \quad (24)$$

Так как мы предполагаем, что влияние чёрной дыры на звезду мало, то $\theta \ll 1$, и косинус можно разложить в ряд до второго члена. Таким образом,

$$\Delta E = \frac{2G^2 M^2 m}{b^2 L^2} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0), \quad (25)$$

или, с учётом определения \mathbf{L} ,

$$\Delta E = \frac{2G^2 M^2 m}{r_0^2 \sin^2 \varphi} \frac{(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0)}{|\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0|^4}, \quad (26)$$

где φ — это угол между \mathbf{r}_0 и $\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0$.

Заменяя m на $\rho d^3 \mathbf{r}_0$, интегрируя по всем звёздам и вводя силу трения как

$$F = \frac{\sum \Delta E}{2TV_0} = \frac{\sum \Delta E}{D}, \quad (27)$$

мы получаем

$$F = 4\pi G^2 M^2 \rho D^{-1} \int_0^{D/2} \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} \frac{r^2 \sin \varphi d\varphi dr}{r^2 \sin^2 \varphi} \int_{\mathbf{v}_0} \frac{(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0)}{|\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0|^4} f(v_0) d^3 \mathbf{v}_0, \quad (28)$$

где D — это размер системы, $f(v_0)$ — это распределение скоростей, предполагаемое изотропным, а $\varphi = \arcsin d/r$. d — это минимальное расстояние между чёрной дырой и звездой. Если вычислить первый интеграл в приближении $d \ll D$, получим

$$F = 4\pi G^2 M^2 \rho \log \frac{D}{d} \int_{\mathbf{v}_0} \frac{(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0)}{|\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0|^4} f(v_0) d^3 \mathbf{v}_0. \quad (29)$$

Второй интеграл зависит от распределения $f(v)$, но можно заметить, что если $v_0 \ll V_0$, то он равняется приблизительно V_0^{-2} , а если $v_0 \gg V_0$, он стремится к нулю из-за нечётности подинтегрального выражения. Таким образом

$$F = \frac{4\pi G^2 M^2}{V_0^2} \rho (< V_0) D \log \frac{D}{d}, \quad (30)$$

что абсолютно идентично выражению (1).

Логарифмическая расходимость по $|\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_0|$ в интеграле (29) физически означает, что особый вклад в динамическое трение вносят звёзды, у которых $\mathbf{v} \approx \mathbf{V}$, то есть движущиеся в “резонансе” с чёрной дырой. Этот результат соотносится с результатом Tremaine & Weinberg [14] для динамического трения в галактике.

2 Динамическое трение в однородной сфере

2.1 Используемая модель

Для того, чтобы изучить динамическое трение в системе гравитационно связанных частиц как аналитически, так и численно, удобно выбрать один из самых простых примеров такой системы — однородную сферу. С одной стороны, данная система является неплохим приближением центральной части галактики без кэпа или ядра гало чёрной материи. С другой стороны, в данной системе можно аналитически рассчитать не только невозмущенные траектории звёзд, но даже и траектории в первом порядке по теории возмущений.

Невозмущенные траектории как звёзд, так и чёрной дыры являются эллипсами, центр которых совпадает с центром галактики, и все звёзды имеют одинаковый период обращения по орбите

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}, \quad (31)$$

где ρ — это плотность звёзд [16], поэтому взаимодействие звезд с чёрной дырой происходит в особом, резонансном режиме. Этот постоянный резонанс одновременно со всеми звёздами является ключевым отличием нашей модели от рассмотренной Чандraseкаром.

Итак, в нашей модели мы помещаем массивную чёрную дыру (с массой $M \approx 10^{-3} M_{galaxy}$) в сферу, равномерно заполненную звёздами. Без чёрной дыры звезды

создают квадратичный потенциал гравитационного поля

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2 r^2, \omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho. \quad (32)$$

Траектории звёзд в этом потенциале задаются формулой:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cos(\omega t) + (\mathbf{v}_0/\omega) \sin(\omega t). \quad (33)$$

Если бы на чёрную дыру не действовало динамическое трение, её траектория была бы такой же. Однако взаимодействие чёрной дыры со звездами изменяет траектории и чёрной дыры, и звезд. Это изменение приводит к изменению в распределении звезд. Мы будем предполагать, что это изменение влияет только на движение чёрной дыры и пренебрежительно мало влияет на движение звёзд. Таким образом, мы будем учитывать только взаимодействие звёзд и чёрной дыры и будем пренебрегать взаимодействием звёзд друг с другом, кроме как через постоянный квадратичный потенциал.

Так как мы предполагаем, что движение звезд происходит в постоянном потенциале, мы должны выбрать начальное распределение звёзд таким образом, чтобы в отсутствие чёрной дыры распределение плотности было постоянным во времени. Простейшим изотропным распределением, удовлетворяющее таким требованиям, является

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\rho}{\pi^2 \omega^2 R \sqrt{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]^2 - \omega^2 R^2 r^2 - R^2 v^2 + \omega^2 R^4}}, \quad (34)$$

где R — радиус галактики. Распределение нормировано таким образом, что его интеграл по всей области определяя (там, где подкоренное выражение положительно) даёт массу галактики. После усреднения этого распределения по скоростям получившееся распределение плотности звёзд является постоянным.

Для получения аналитических результатов мы должны сделать ещё одно приближение. Будем сначала считать, что чёрная дыра движется с постоянной энергией и её траектория определяется только невозмущенным распределением звёзд, как это было сделано в выводе формулы Чандрасека в предыдущем разделе. После этого мы определим, какая энергия передаётся звёздам от чёрной дыры, и сделаем необходимые обобщения.

2.2 Возмущенные траектории звёзд

Для выбранной системы невозмущенным гамильтонианом является

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}, \quad (35)$$

а возмущение опять имеет вид:

$$V = -GmM/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|. \quad (36)$$

Так как мы предположили, что чёрная дыра движется только в начальном потенциале звёзд, её траектория задаётся уравнением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{P}_0}{M\omega} \sin(\omega t). \quad (37)$$

Невозмущенная траектория звезды:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{p}_0}{m\omega} \sin(\omega t) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_0 \cos(\omega t) - m\mathbf{r}_0\omega \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя (38) в (3) и (4), принимая во внимание (36) и (37), получим

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)\dot{\mathbf{r}}_0 + \sin(\omega t)\frac{\dot{\mathbf{p}}_0}{m\omega} &= 0 \\ -m\omega \sin(\omega t)\dot{\mathbf{r}}_0 + \cos(\omega t)\dot{\mathbf{p}}_0 &= GMm\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \end{aligned} \quad (39)$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \frac{1}{|\mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t)|} \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \frac{1}{|\mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t)|}, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\alpha = GM/\omega, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_0, \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{p}_0}{m\omega} - \frac{\mathbf{P}_0}{M\omega} \end{aligned} \quad (42)$$

— относительные положение и нормированная на орбитальную частоту скорость звезды с системе отсчёта чёрной дыры.

Мы вновь получили гамильтонову систему с зависящим от времени гамильтонианом. Если предположить, что влияние чёрной дыры на звезду за один период колебаний мало, то уравнения (40) можно упростить, усреднив все величины по одному периоду обращения звезды. Усреднённый Гамильтониан принимает вид:

$$I(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|\mathbf{a} \cos(\varphi) + \mathbf{b} \sin(\varphi)|}. \quad (43)$$

В результате мы получим классическую гамильтонову систему с независящим от времени гамильтонианом I :

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\partial I}{\partial \mathbf{b}}; \quad \dot{\mathbf{b}} = -\frac{\partial I}{\partial \mathbf{a}} \quad (44)$$

Одним из основных свойств таких систем является тот факт, что I сохраняется во времени. Также из (40) можно непосредственно получить, что величина углового

момента звезды в системе чёрной дыры

$$\mathbf{L} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \quad (45)$$

также сохраняется.

Сохранение момента \mathbf{L} приводит к тому, что орбита в этой системе является плоской. Расположим плоскость Oxy так, чтобы оси Ox , Oy и \mathbf{L} составляли правую тройку векторов. В этой плоскости выберем новые эллиптические переменные: обозначим через m большую полуось эллипса, через n — малую полуось, через θ — угол между большой полуосью и осью Ox , а через φ — угол между радиус-вектором к звезде и большой полуосью, тогда:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} m \cos \theta \cos \varphi - n \sin \theta \sin \varphi \\ m \sin \theta \cos \varphi + n \cos \theta \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} -m \cos \theta \sin \varphi - n \sin \theta \cos \varphi \\ -m \sin \theta \sin \varphi + n \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (46)$$

В этих переменных

$$L = \mathbf{L}_z = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_z = mn \quad (47)$$

и

$$I = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2(\varphi) + n^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{m} \mathcal{K}\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right), \quad (48)$$

где $\mathcal{K}(x)$ — эллиптический интеграл второго рода. Сохранение $I(m, n)$ и $L(m, n)$ означает сохранение также m и n , а следовательно, и сохранение величины

$$E = \frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2} = \frac{m^2 + n^2}{2}. \quad (49)$$

В новых переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial I}{\partial m^2} \frac{\partial m^2}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial I}{\partial n^2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial I}{\partial m^2} + \frac{\partial I}{\partial n^2} \right) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}} + \left(\frac{\partial I}{\partial m^2} - \frac{\partial I}{\partial n^2} \right) \frac{\partial \sqrt{E^2 - L^2}}{\partial \mathbf{a}} = \\ &= \left(\frac{\partial I}{\partial m^2} + \frac{\partial I}{\partial n^2} + \left(\frac{\partial I}{\partial m^2} - \frac{\partial I}{\partial n^2} \right) \frac{E}{\sqrt{E^2 - L^2}} \right) \mathbf{a} + \left(\frac{\partial I}{\partial m^2} - \frac{\partial I}{\partial n^2} \right) \frac{L}{\sqrt{E^2 - L^2}} \mathbf{b}^\perp, \end{aligned} \quad (50)$$

где $\mathbf{b}^\perp = \begin{pmatrix} b_y \\ -b_x \end{pmatrix}$. Так как величины E , L , I , m и n сохраняются, то

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{a}} = \Omega_2 \mathbf{a} - \Omega_1 \mathbf{b}^\perp \quad (51)$$

Аналогично можно получить, что

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{b}} = \Omega_2 \mathbf{b} + \Omega_1 \mathbf{a}^\perp, \quad (52)$$

где $\mathbf{a}^\perp = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -\left(\frac{\partial I}{\partial m^2} - \frac{\partial I}{\partial n^2}\right)\frac{L}{\sqrt{E^2-L^2}} \\ \Omega_2 &= \frac{\partial I}{\partial m^2} + \frac{\partial I}{\partial n^2} + \left(\frac{\partial I}{\partial m^2} - \frac{\partial I}{\partial n^2}\right)\frac{E}{\sqrt{E^2-L^2}}\end{aligned}\quad (53)$$

Применяя тождество

$$\mathcal{K}'(x) = \frac{\mathcal{E}(x) - (1-x)\mathcal{K}(x)}{2(1-x)x}, \quad (54)$$

где $\mathcal{E}(x)$ — эллиптический интеграл первого рода, можно получить

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial m^2} + \frac{\partial I}{\partial n^2} &= -\frac{\alpha}{\pi m^2 n^2} n \mathcal{E}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) \\ \frac{\partial I}{\partial m^2} - \frac{\partial I}{\partial n^2} &= \frac{\alpha}{\pi(m^2-n^2)} \left(\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) n \mathcal{E}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) - 2\frac{1}{n} \mathcal{K}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) \right)\end{aligned}\quad (55)$$

Уравнения (44) в новых переменных (46) принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \dot{n} = 0 \\ \dot{\theta} &= \Omega_1 \\ \dot{\varphi} &= \Omega_2\end{aligned}\quad (56)$$

Данная система легко интегрируется и, переходя к предыдущим координатам, получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= \mathbf{O}_2(t)(\mathbf{a}_0 \cos(\Omega_2 t) + \mathbf{b}_0 \sin(\Omega_2 t)) \\ \mathbf{b}(t) &= \mathbf{O}_2(t)(-\mathbf{a}_0 \sin(\Omega_2 t) + \mathbf{b}_0 \cos(\Omega_2 t)),\end{aligned}\quad (57)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0 &= \mathbf{r}(0) - \mathbf{R}(0) \\ \mathbf{b}_0 &= \frac{1}{m\omega}\mathbf{p}(0) - \frac{1}{M\omega}\mathbf{P}(0),\end{aligned}\quad (58)$$

а $\mathbf{O}_2(t)$ — двумерная матрица вращения:

$$\mathbf{O}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_1 t) & -\sin(\Omega_1 t) \\ \sin(\Omega_1 t) & \cos(\Omega_1 t) \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Для того, чтобы переписать эти уравнения для произвольного направления вращения, необходимо просто заменить матрицу $\mathbf{O}_2(t)$ на матрицу $\mathbf{O}(t)$ (20), в которой $\theta = \Omega_1 t$ и $\mathbf{n} = \mathbf{L}/L$.

Таким образом, возмущенная траектория звезды в первом приближении определяется уравнением:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{O}(t)(\mathbf{a}_0 \cos(\omega' t) + \mathbf{b}_0 \sin(\omega' t)) + \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{p}(t) &= m\omega\mathbf{O}(t)(-\mathbf{a}_0 \sin(\omega' t) + \mathbf{b}_0 \cos(\omega' t)) + \frac{m}{M}\mathbf{P}(t),\end{aligned}\quad (60)$$

где

$$\omega' = \omega + \Omega_2. \quad (61)$$

Возмущенные орбиты звёзд больше не являются замкнутыми эллипсами. В системе отсчёта, связанной с чёрной дырой, положение большой полуоси орбиты прецессирует с небольшой частотой Ω_1 . Также изменяется и орбитальный период звезд. Небольшая добавка к частоте Ω_2 изменяет период обращения звезд по сравнению с периодом обращения чёрной дыры, выводит звёзды из полного резонанса с чёрной дырой. Это решает проблему бесконечно большого трения, которая обсуждается в статье Read et al. [12].

2.3 Потери энергии чёрной дырой

Зависимость энергии звезды от времени $e = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$ может быть непосредственно получена с помощью уравнения (60):

$$\begin{aligned}
e(t) = e(0) + & m\omega^2 R_0^2(1 - \cos \varphi_r \cos(\Omega_2 t)) - m(\omega \mathbf{r}_0 \cdot \omega \mathbf{R}_0) + \\
& m(\omega \mathbf{r}_0 \cos(\Omega_2 t) + \mathbf{v}_0 \sin(\Omega_2 t) \cdot \mathbf{O}(t) \omega \mathbf{R}_0) + \\
& mV_0^2(1 - \cos \varphi_v \cos(\Omega_2 t)) - m(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{V}_0) + \\
& m(\mathbf{v}_0 \cos(\Omega_2 t) - \omega \mathbf{r}_0 \sin(\Omega_2 t) \cdot \mathbf{O}(t) \mathbf{V}_0),
\end{aligned} \tag{62}$$

где

$$\cos \varphi_i = \cos^2 \gamma_i + \sin^2 \gamma_i \cos(\Omega_1 t), \tag{63}$$

γ_r — угол между \mathbf{R}_0 и $\mathbf{L} = [\mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0]$, γ_v — угол между \mathbf{V}_0 и \mathbf{L} , а $\mathbf{V}_0 = \mathbf{P}(0)/M$. Мы пренебрегли здесь взаимодействием звезды с чёрной дырой, так как она намного меньше ($M/M_G \ll 1$) взаимодействия звезды с потенциалом галактики.

Потери энергии чёрной дырой — это сумма переданных каждой звезде энергий. Таким образом, заменяя суммирование интегрированием по траектории, получим

$$\begin{aligned}
\Delta E_{bh}(t) = \rho \int \{ & [-V_0^2(1 - \cos \varphi_r \cos(\Omega_2 t)) + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{V}_0) - \\
& ((\mathbf{v}_0 \cos(\Omega_2 t) - \omega \mathbf{r}_0 \sin(\Omega_2 t)) \cdot \mathbf{O}(t) \mathbf{V}_0)] + \\
& [(-\omega^2 R_0^2(1 - \cos \varphi_v \cos(\Omega_2 t)) + (\omega \mathbf{r}_0 \cdot \omega \mathbf{R}_0) - \\
& ((\omega \mathbf{r}_0 \cos(\Omega_2 t) + \mathbf{v}_0 \sin(\Omega_2 t)) \cdot \mathbf{O}(t) \omega \mathbf{R}_0))] \} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{64}$$

Так как мы рассматриваем усреднённое по орбитальному периоду движение, распределение звёзд по орбитальной фазе можно считать равномерным. Тогда выражение (64) не должно зависеть от сдвига по орбитальной фазе $\Omega_2 t$. Следовательно, уравнение (64) можно упростить, положив $\Omega_2 t = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{bh}(t) = \rho \int \{ & [-V_0^2(1 - \cos \varphi_r) + (\mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{O}(t)) \mathbf{V}_0)] \\
& + [(-\omega^2 R_0^2(1 - \cos \varphi_v) + (\omega \mathbf{r}_0 \cdot \omega (\mathbf{1} - \mathbf{O}(t)) \mathbf{R}_0))] \} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{65}$$

С учётом вида матрицы поворота, подынтегральное выражение содержит два слагаемых, одно из которых пропорционально $1 - \cos \Omega_1 t$ (обозначим его интеграл $\Delta E_{bh, \cos}(t)$),

а второе пропорционально $\sin \Omega_1 t$:

$$\Delta E_{bh}(t) = \Delta E_{bh,cos}(t) + \rho \int [(\mathbf{r} \cdot [\mathbf{R}_0 \times \mathbf{n}]) + (\mathbf{v} \cdot [\mathbf{V}_0 \times \mathbf{n}])] \sin(\Omega_1 t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}. \quad (66)$$

Так как мы рассматриваем медленные изменения траектории и усредняем по периоду обращения (см. выражение (43)), мы можем сдвинуть начальные положения звезды и чёрной дыры на четверть периода, не изменив при этом результата. Это приведёт к заменам $\mathbf{R}_0 \rightarrow \mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_0 \rightarrow -\mathbf{R}_0$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{r}$. Однако, ввиду симметрии исходной задачи, мы можем сделать замены $\mathbf{R}_0 \rightarrow -\mathbf{R}_0$, $\mathbf{V}_0 \rightarrow -\mathbf{V}_0$, $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$, также не изменяя результата. Данные две замены меняют знак второго слагаемого, однако не изменяют физической системы, поэтому второе слагаемое обязано равняться нулю. Эти приближения подтверждаются численным интегрированием (см. Рис. 1).

Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} \Delta E_{bh}(t) = & -\rho \int [V_0^2 \sin^2 \gamma_v + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{n}) - \\ & (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{V}_0) + \omega^2 (R_0^2 \sin^2 \gamma_r + (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{R}_0))] \\ & (1 - \cos(\Omega_1 t)) f(r, v) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (67)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{L}/L$, $\mathbf{L} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$, или, окончательно,

$$\begin{aligned} \Delta E_{bh}(t) = & \rho \int \{ ([\mathbf{V}_0 - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{V}_0 \times \mathbf{n}] + \\ & \omega^2 ([\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{R}_0 \times \mathbf{n}])) (1 - \cos(\Omega_1 t)) f(r, v) \} \\ & d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (68)$$

Для определения зависимости этого результата от параметров системы перейдём к безразмерным переменным. Пусть радиус галактики равен R_G , тогда введём замены

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R_G \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v} &= R_G \omega \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{R}_0 &= R_G \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{V}_0 &= R_G \omega \mathbf{X}_2 \\ f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 &= \frac{f(R_G \mathbf{x}_1, R_G \omega \mathbf{x}_2)}{4/3\pi R_G^3} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (69)$$

после которых переданная энергия определяется уравнением

$$\begin{aligned} \Delta E_{bh}(t) = & M_G R_G^2 \omega^2 \int \{ ([\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}_1 \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{X}_1 \times \mathbf{n}] + \\ & ([\mathbf{X}_2 - \mathbf{x}_2 \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{X}_2 \times \mathbf{n}])) (1 - \cos(\Omega_1 t)) f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2, \end{aligned} \quad (70)$$

а

$$\Omega_1 = -\omega \frac{\alpha}{R_G^3 \omega} \frac{2m'n'}{\pi(m'^2 - n'^2)^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{m'^2} + \frac{1}{n'^2} \right) n' \mathcal{E} \left(1 - \frac{m'^2}{n'^2} \right) - 2 \frac{1}{n'} \mathcal{K} \left(1 - \frac{m'^2}{n'^2} \right) \right] \quad (71)$$

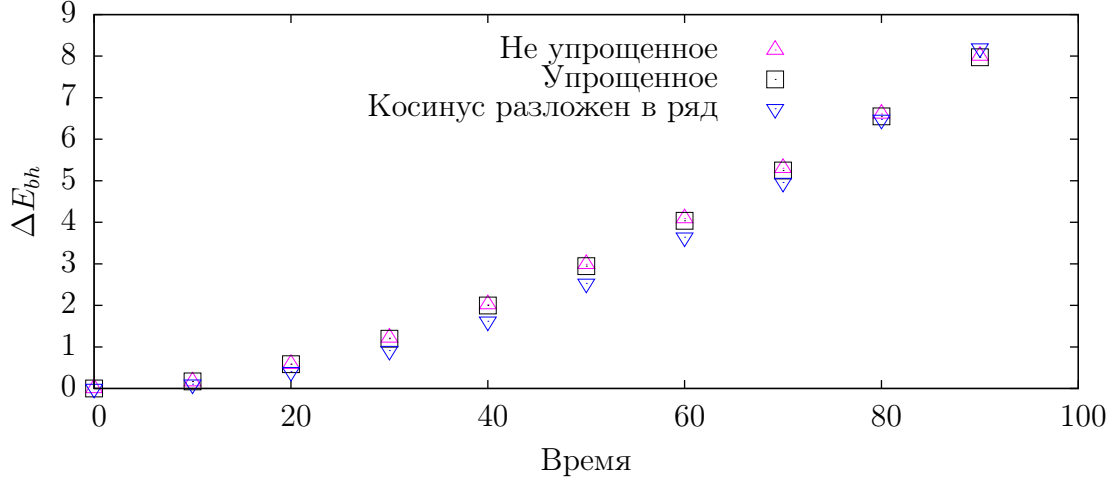


Рис. 1: Вычисление потерь энергии чёрной дыры методом Монте-Карло для неупрощенного уравнения (64), упрощенного уравнения (70) и уравнения с разложенным в ряд косинусом (74) при $|X_1| = |X_2| = 1/\sqrt{2}$, $\mathbf{X}_1 \perp \mathbf{X}_2$. Данный результат показывает, что предположения, сделанные для получения конечной формулы, корректны. $M_G = 10^3$, $M = 1$, $\omega = 1$, $R_G = 1$.

где

$$\begin{aligned} m &= R_G m' \\ n &= R_G n' \end{aligned} \quad (72)$$

Можно заметить, что

$$\frac{\alpha}{R_G^3 \omega} = \frac{GM}{\omega^2 R_G^3} = \frac{GM}{\frac{4}{3}\pi G \rho R_G^3} = \frac{M}{M_G} \quad (73)$$

В наших расчётах мы использовали $M/M_G \approx 10^{-3}$. В реальных системах эта величина ещё меньше. Поэтому Ω_1 в нашем случае является величиной порядка 10^{-3} для большинства звезд. Чёрная дыра потеряет всю энергию, когда $\Delta E_{bh} \approx E_0$. Если начальная энергия чёрной дыры соответствует скорости убегания из галактики¹, E_0 является величиной порядка $R_G^2 \omega^2$. Таким образом, нас интересуют времена, при которых интеграл в уравнении (70) по порядку величины равен 10^{-3} , то есть по крайней мере $\omega t < 100$. На этих временах для большинства величин $\Omega_1 t \ll 1$, и косинус можно разложить в ряд Тейлора до второго порядка. Однако при этом мы должны исключить звезды, для которых $\Omega_1 \gg 10^3$, так как в реальности любая звезда может передать чёрной дыре только ограниченное количество энергии. В качестве подтверждения этого предположения на Рис. 1 приведено сравнение результатов численного интегрирования уравнений (64), (70) и уравнения

$$\begin{aligned} \Delta E_{bh}(t) &= \frac{R_G^2 M^2 \omega^4 t^2}{2M_G} \int' \{ ([\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}_1 \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{X}_1 \times \mathbf{n}]) + \\ &([\mathbf{X}_2 - \mathbf{x}_2 \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{X}_2 \times \mathbf{n}]) \} \Omega_1'^2 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2, \end{aligned} \quad (74)$$

¹Здесь и далее под скоростью убегания мы будем понимать скорость, необходимую для того, чтобы покинуть сферу звезд, а не для того, чтобы удалиться от неё на бесконечное расстояние, то есть $V_{esc} = \omega R_G$.

где

$$\Omega'_1 = \frac{M_G \Omega_1}{M \omega} \quad (75)$$

и ' над интегралом означает, что он берётся только по тем областям, где выполняется условие $\Omega'_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \gg 1$. Параметрами подынтегрального выражения являются только величины \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 , таким образом, можно записать

$$\Delta E_{bh}(t) = -\frac{R_G^2 M^2 \omega^4 t^2}{2M_G} F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2). \quad (76)$$

Так как $E_0 = MV_0^2/2 + M\omega^2 R_0^2/2 = MR_G^2 \omega^2 (X_1^2 + X_2^2)/2$, то

$$\frac{\Delta E_{bh}(t)}{E_0} = -\frac{M}{M_G} \frac{F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{X_1^2 + X_2^2} \omega^2 t^2. \quad (77)$$

Результат вычисления безразмерного выражения

$$\frac{F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{X_1^2 + X_2^2}, \quad (78)$$

методом Монте-Карло для некоторых значений параметров показан на Рис. 2. Как видно из рисунка, а также из вычислений при других начальных параметрах, эта величина является практически постоянной на всём интервале значений параметров и равняется

$$\frac{F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{X_1^2 + X_2^2} \approx C \approx 2. \quad (79)$$

Точное значение величины C зависит приблизительно логарифмически от величины $\Omega'_{1\max}$, на которой обрывается интегрирование. В наших вычислениях мы использовали условие $\Omega'_1 < 3$. Ниже будет показано, что значение $C \approx 2$ хорошо соотносится с результатами численного моделирования.

Таким образом, мы получаем

$$\frac{\Delta E_{bh}(t)}{E_0} = -C \frac{M}{M_G} \omega^2 t^2. \quad (80)$$

Данный результат предсказывает очень быструю потерю энергии чёрной дырой. В реальности, чёрная дыра не имеет возможности отдать больше, чем её начальная энергия. Поэтому данный результат нужно обобщить на случай затухания колебаний чёрной дыры из-за её потерь энергии. Для этого предположим, что потери энергии в данный момент t пропорциональны не величине $E_{bh}(0)$, а величине $E_{bh}(t)$. Таким образом, выражение принимает вид

$$\frac{dE_{bh}(t)}{E_{bh}(t)} = d\left(-C \frac{M}{M_G} \omega^2 t^2\right), \quad (81)$$

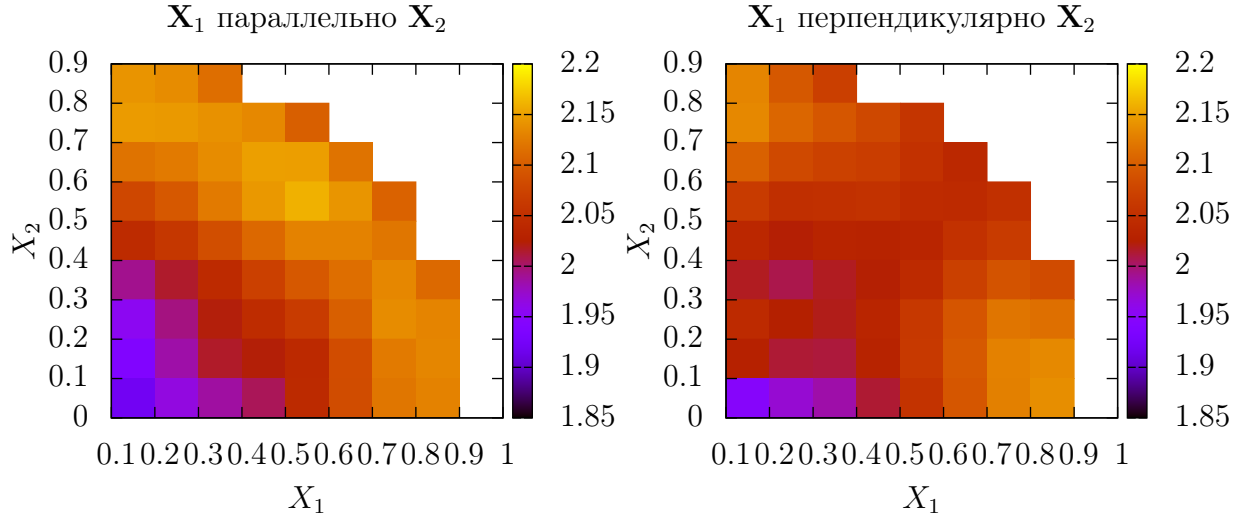


Рис. 2: Значение выражения (78), вычисленное для разных значения параметров \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 . Результаты получены методом Монте-Карло интегрирования с распределением (34) и использованием 10^7 звезд. Данные результаты показывают, что в выражении для потерь энергии чёрной дыры отсутствует зависимость от начального положения чёрной дыры $\mathbf{R}_0 = R_G \mathbf{X}_1$ и начальной скорости $\mathbf{V}_0 = \omega R_G \mathbf{X}_1$. Отклонение среднего значения от максимального и минимального не превышает 10%.

и, в конечном счёте,

$$E_{bh}(t) = E_0 \exp\left[-C \frac{M}{M_G} \omega^2 t^2\right] \quad (82)$$

Одним из наиболее интересных следствий данной формулы является тот факт, что при равных начальных скоростях (в единицах скорости убегания из галактики) чёрная дыра будет терять энергию за

$$N \propto \sqrt{M_G/M} \quad (83)$$

колебаний.

3 Численные вычисления потерь энергии

Для изучения параметров затухания чёрной дыры и подтверждения аналитических результатов мы провели численные вычисления движения чёрной дыры в рассмотренной системе звёзд.

3.1 Модель вычислений

Модель вычислений была выбрана таким образом, чтобы быть максимально близкой к аналитическим расчётам. Звёзды были распределены по сфере согласно распределению (34). В центр «галактики» помещалась чёрная дыра с некоторой начальной скоростью от нуля до скорости убегания из галактики. Для упрощения вычислений взаимодействие звёзд друг с другом было заменено на взаимодействие их со средним

потенциалом, который считался постоянным и равным (32). Это понижает сложность алгоритма с $O(N^2)$ до $O(N)$, где N — количество звёзд и позволяет производить вычисления на обычном персональном компьютере. Шаг интегрирования был выбран таким образом, чтобы обеспечивать относительную ошибку вычисления параметров звёзд не более 10^{-5} на каждом шаге. В случае, если звезда приближалась настолько близко к чёрной дыре, что простое интегрирование приводило к слишком маленьким шагам, траектория звезды определялась аналитически согласно кеплеровской траектории в поле чёрной дыры [17], при этом потенциал галактики учитывался как поправка. Данный алгоритм описан в статье Lezhnin & Chernjagin [18].

Отсутствие ошибок, связанных с точностью счёта, проверялась путём расчёта некоторых начальных конфигураций при нескольких отличающихся в несколько раз начальных шагах интегрирования. Вычисления не показали качественных различий в поведении чёрной дыры.

Начальное распределение звезд создавалось методом Монте-Карло согласно распределению (34). После получения начального распределения некоторые звёзды были заменены на новые случайные звезды, так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} m\omega|\sum \mathbf{r}_0| &< 10^{-3}MV_0 \\ |m\sum \mathbf{v}_0 + M\mathbf{V}_0| &< 10^{-3}MV_0 \\ m\omega\|\sum[\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0]\| &< 10^{-3}MV_0^2. \end{aligned} \quad (84)$$

Эти условия обеспечивают незначительность колебаний центра масс и вращения распределения звёзд относительно системы отсчёта, к которой привязан квадратичный потенциал. Данное действие было необходимо, так как при использованном количестве звезд ($10^5 - 10^6$) для центра масс случайного распределения, пропорциональный величине $R_c \sim R_G/\sqrt{N}$, выполняется условие $R_c M_G \sim R_G M$.

Описанная модель имеет три независимых параметра: массу галактики, массу звезды (этот параметр определяет дискретизацию счёта) и начальную скорость чёрной дыры. Масса чёрной дыры принята за 1, время нормировано так, что $\omega = 1$.

3.2 Результаты вычисления

Вычисления были сделаны для различных значений параметров системы: начальной скорости, массы звезды и массы галактики. В качестве примера на Рис. 3 приведена зависимость кинетической энергии от времени для системы с $M_G = 10^3$, $m = 10^{-3}$, $V_0 = V_{esc}$. Данный результат можно сравнить с рис. 3 в работе Read et al. [12].

Движение чёрной дыры может быть разделено на три фазы. Первая фаза — это быстрое затухание колебаний чёрной дыры, вторая фаза — это быстрый симметричный рост энергии до некоторого значения, третья фаза — это колебания с практически постоянной амплитудой.

Изменение энергии чёрной дыры в первой фазе движения хорошо описывается теоретическими предсказаниями (82). На Рис. 4 приведены зависимости энергии чёр-

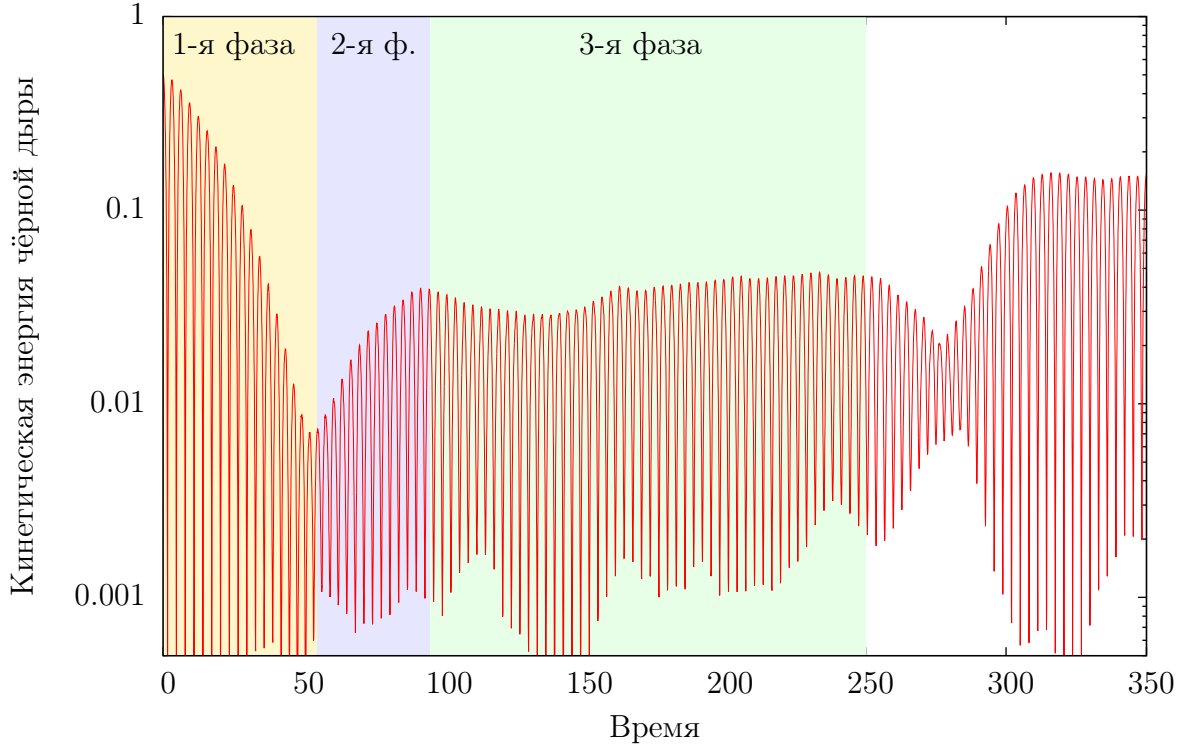


Рис. 3: Эволюция кинетической энергии чёрной дыры для системы с $M_{bh} = 1$, $M_G = 10^3$, $m_{star} = 10^{-3}$.

ной дыры от времени в первой фазе для разных масс галактик и соответствующие теоретические кривые согласно уравнению (82). Значение параметра C , использованного для построения каждой кривой, указано на рисунке. На Рис. 5 представлена зависимость времени, за которое энергия чёрной дыры понижается до уровня 0.01 от начальной, от массы галактики, а также предсказываемая аналитическая зависимость (83).

Первая фаза заканчивается при достижении чёрной дырой энергии, соразмерной с броуновской.

Квадратичная зависимость потери энергии от времени может быть объяснена, аналогично объяснению динамического трения [3], появлением повышенной плотности звёзд («хвоста»), движущейся в противофазе с чёрной дырой, и пониженной плотности звёзд впереди чёрной дыры. Однако в нашем случае хвост не стационарен. В начальный момент он отсутствует, так как распределение звезд равномерно. Действие чёрной дыры на звёзды приводит к его появлению и линейному нарастанию его массы. Данный хвост приводит к избыточной силе притяжения со стороны, противоположной направлению движения чёрной дыры. Однако в отличие от случая Чандрасекара, в котором данный хвост движется за объектом с постоянной скоростью, в нашей системе хвост «преследует» чёрную дыру, колеблясь с одинаковой с ней частотой. Это приводит к быстрой потере энергии чёрной дырой. Так энергия чёрной дыры падает до броуновского уровня, при котором существенны взаимодействия с

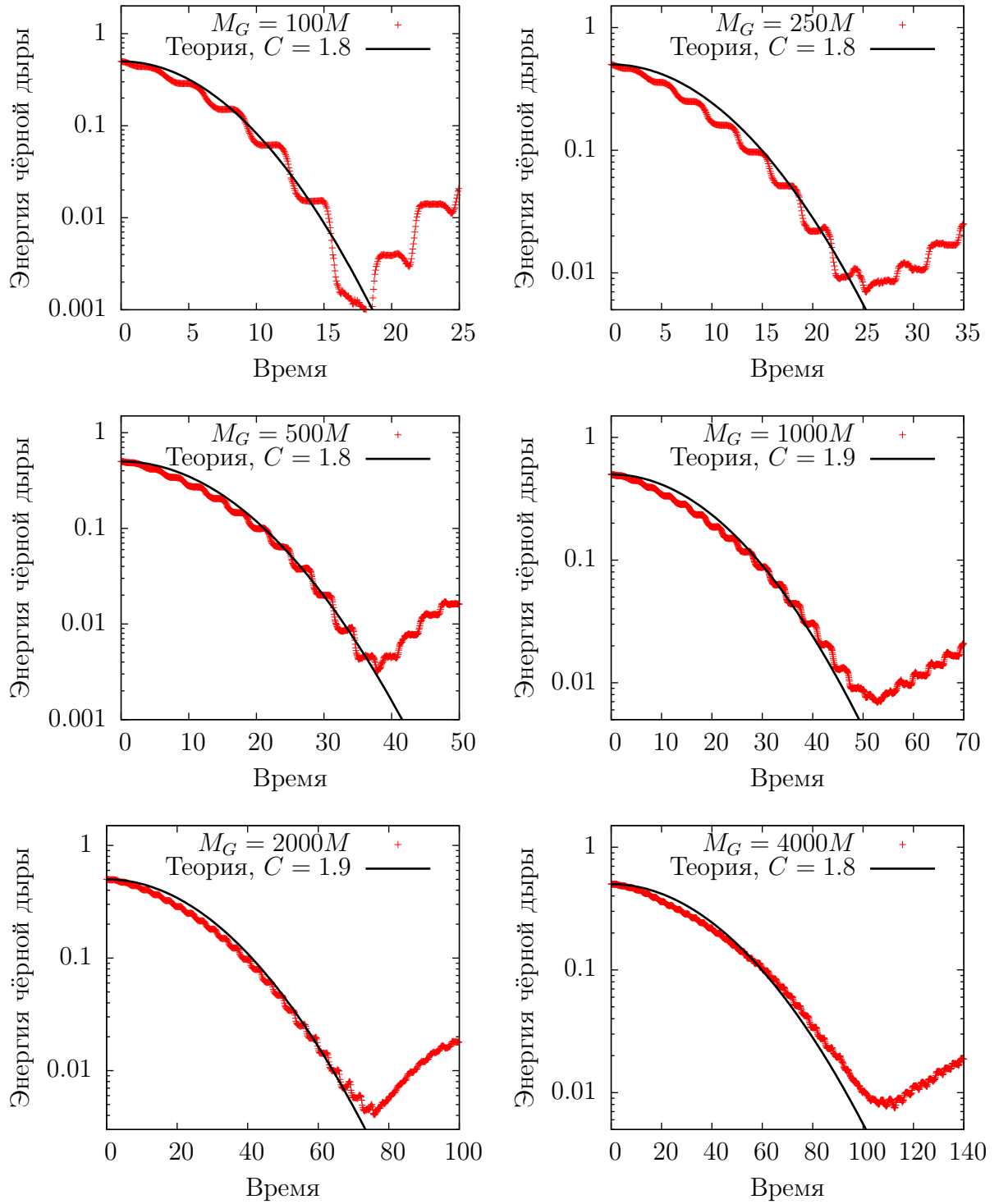


Рис. 4: Численные вычисления и теоретическая кривая (82) зависимости энергии чёрной дыры от времени для различных масс галактики, $m_{star} = 10^{-3}M_{BH}$

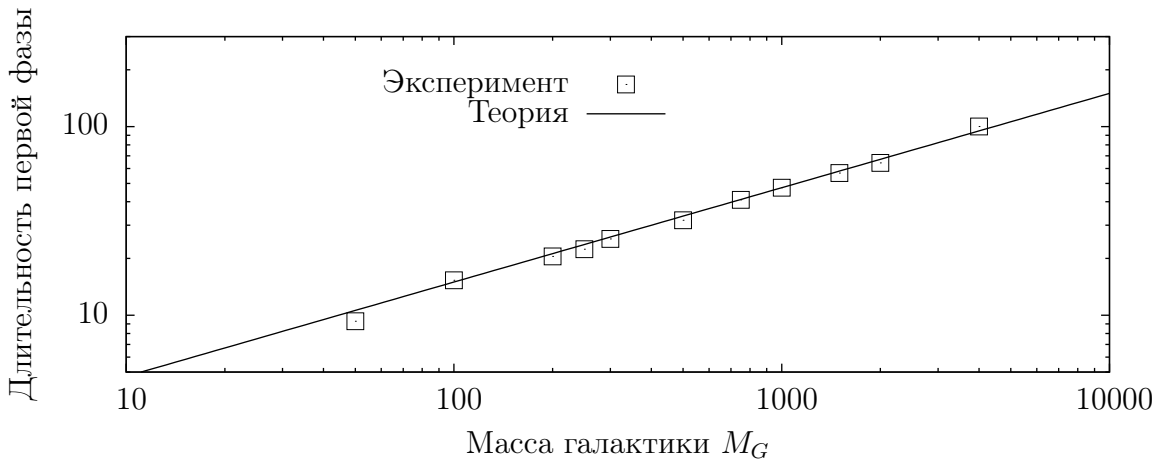


Рис. 5: Время, за которое энергия чёрной дыры понижается до уровня 0.01 от начальной (квадраты) и это же время, предсказываемое выражением (83) (линия)

отдельными звездами:

$$\frac{1}{2}M_{BH}V^2 = \frac{1}{2}m_{star}v^2. \quad (85)$$

После этого фаза чёрной дыры скачкообразно меняется на противоположную и хвост оказывается не сзади, а впереди. Так начинается вторая фаза — раскачивание чёрной дыры, практически симметричное затуханию, — которая продолжается до прихода в равновесие и наступления третьей фазы.

Численные результаты показывают, что повышенная (или пониженная) плотность формируется в узком слое на границе галактики (Рис. 6). Этот факт является следствием резкой границы функции распределения в этой области.

В третьей фазе средняя энергия чёрной дыры практически постоянна. Величина этой энергии зависит в большой степени от начального распределения звезд и от энергии, при которой чёрная дыра скачком поменяла свою фазу на противоположную (Рис. 7). Этот факт затрудняет анализ зависимости энергии третьей фазы от параметров системы. Однако оказалось, что для чёрной дыры с круговой начальной орбитой значение этой энергии более стабильно по реализации. Поэтому последующие результаты приведены для круговой начальной орбиты чёрной дыры.

Величина энергии третьей фазы не зависит от массы звезды m , поэтому данный эффект не является следствием взаимодействия с отдельными звёздами (Рис. 8). Зависимость изменения энергии чёрной дыры от массы галактики приведена на Рис. 9. Явной зависимости энергии чёрной дыры в третьей фазе не наблюдается. При изменении массы галактики в 20 раз энергия третьей фазы меняется не более чем в 5 раз. Это означает, что данный эффект возникает из-за изменения распределения звезд и появления в новом потенциале стационарной для чёрной дыры орбиты. На этой орбите обмен энергии между чёрной дырой и звёздами скомпенсирован. Эта орбита определяется видом распределения звёзд, не зависит от массы галактики (которая является лишь нормой распределения), и не зависит от массы чёрной дыры, так как она определяют только скорость обмена энергией, которая равна нулю на этой

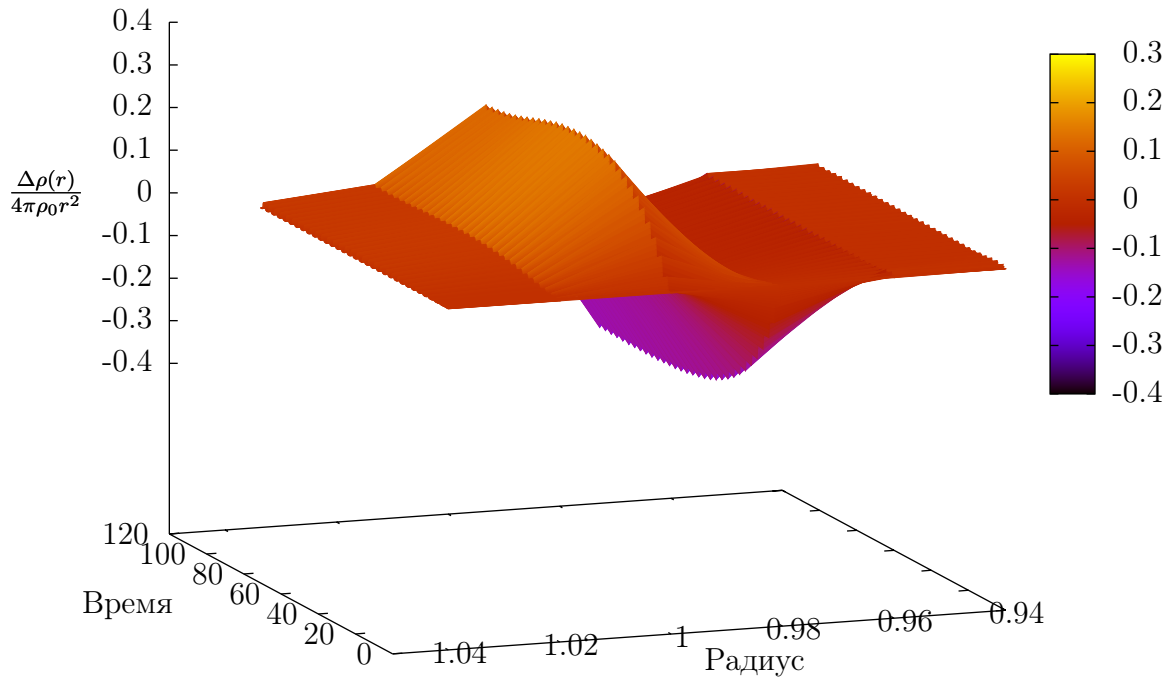


Рис. 6: Изменение функции распределения с течением времени. Показана только узкая приграничная область сферы, в которой изменение максимально. Повышенная плотность сменяет пониженную в зависимости от направления движения чёрной дыры (к центру или от центра). Показано изменение усреднённой по углам функции распределения $\rho(r)$, делённое на величину $4\pi\rho_0r^2$

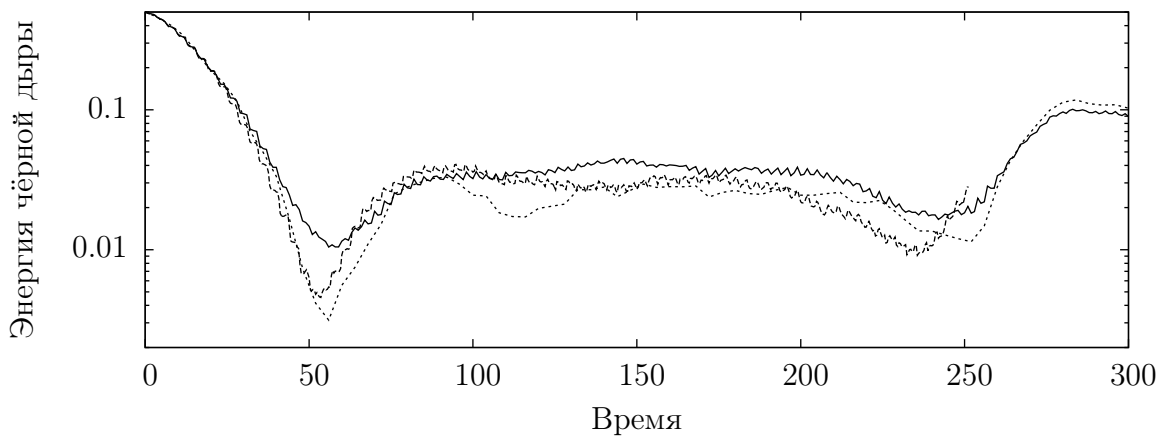


Рис. 7: Зависимость энергии третьей фазы от реализации. Приведены три графика для трёх разных начальных распределений звезд с одинаковыми средними параметрами $M_{bh} = 1$, $M_{galaxy} = 10^3$, $m_{star} = 10^{-3}$.

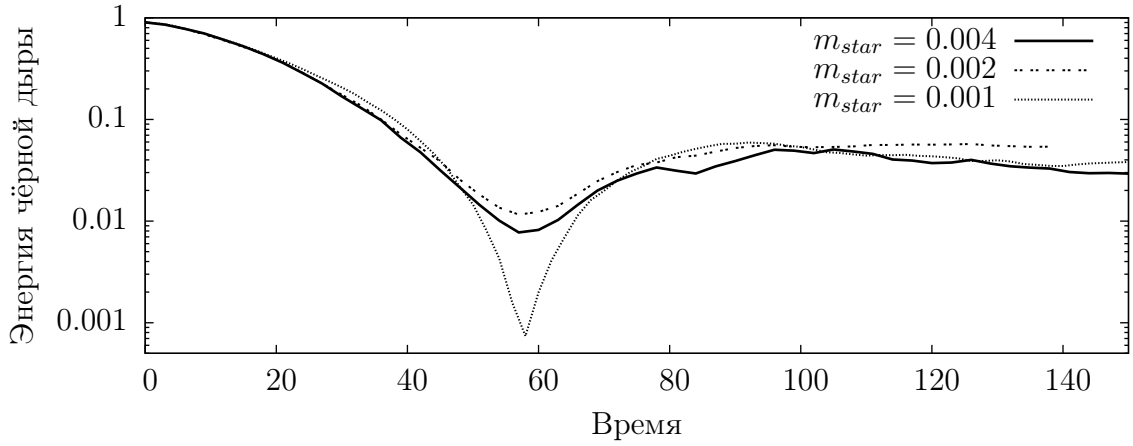


Рис. 8: Зависимость энергии третьей фазы от массы звезды. $M_{bh} = 1$, $M_{galaxy} = 10^3$.

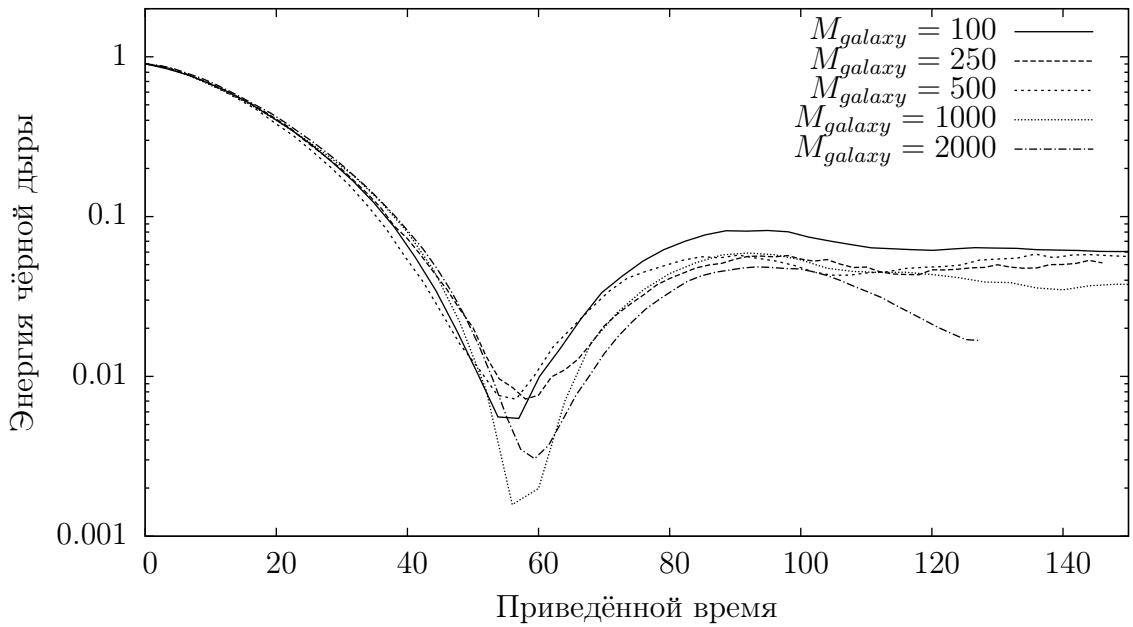


Рис. 9: Зависимость энергии третьей фазы от массы галактики. $M_{bh} = 1$, $m_{star} = 10^{-3}$. Время нормализовано на величину $\sqrt{M_{galaxy}/10^3}$ согласно (83) так, чтобы время прохождения первой фазы было одинаково для всех графиков.

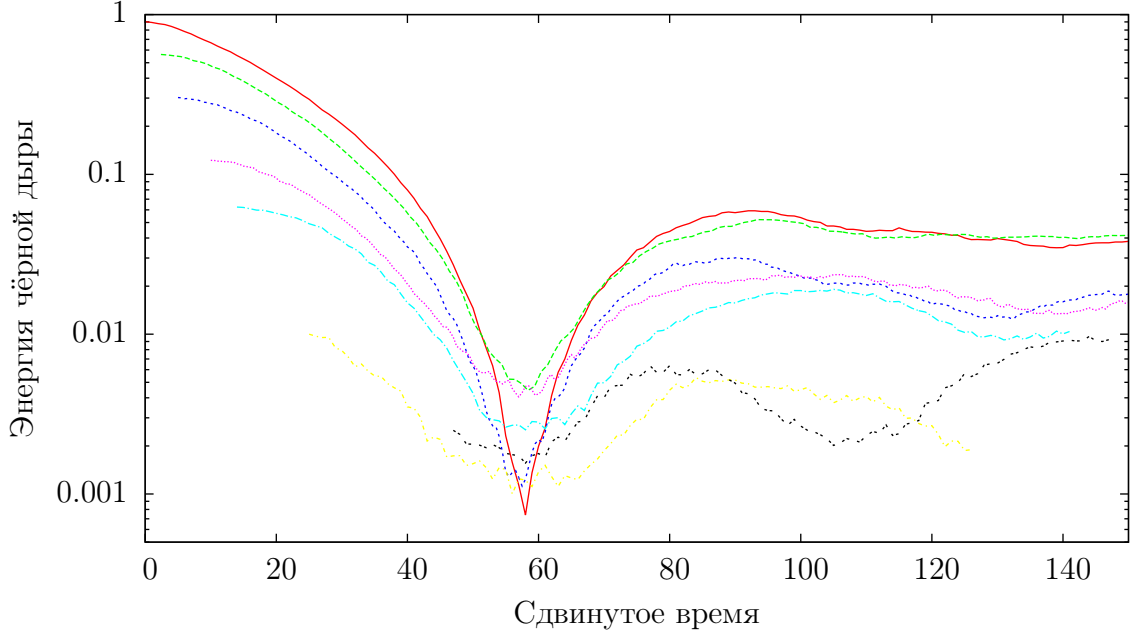


Рис. 10: Зависимость энергии третьей фазы от начальной энергии. $M_{bh} = 1$, $m_{star} = 10^{-3}$, $M_G = 10^3$. Время сдвинуто согласно (83) так, чтобы время окончания первой фазы было одинаково для всех графиков.

орбите.

Наличие данной фазы не удаётся описать с использованием приведённой выше теории. Как уже было показано выше, в невозмущенном квадратичном потенциале нет стационарной орбиты для чёрной дыры. При любой начальной энергии больше броуновской чёрная дыра будет сначала испытывать трение и только после этого перейдет в стационарное состояние (Рис. 10). Поэтому для получения аналитического объяснения этого эффекта необходимо принять во внимание изменения потенциала. Эти изменения приводят к изменению траектории чёрной дыры и к потере ею резонанса со звёздами.

4 Выводы

4.1 Квадратичная зависимость трения от времени

При выводе формулы Чандрасекара сила трения для равномерно движущегося тела оказывалась постоянной (13). В нашем случае сила трения существенно нестационарна. Так, в начальный момент времени распределение звёзд не возмущено и, следовательно, сила трения равна нулю. Трение появляется в результате образования хвоста из звезд. Масса хвоста линейна по времени, следовательно, потери энергии квадратичны.

4.2 Сверх-чандрасекаровское трение

Для нашей системы формула Чандрасекара (1), с учётом $\rho(< V) = \rho \frac{V^3}{\omega^3 R_G^3}$, принимает вид

$$\frac{dV}{dt} = -3 \ln \Lambda \frac{M}{M_G} \omega V, \quad (86)$$

или, интегрируя и обозначая $C = -6 \ln \Lambda$,

$$E_{bh}(t) = E_0 \exp[-C \frac{M}{M_G} \omega t]. \quad (87)$$

Из этой формулы следует, что время, за которое теряется энергия, составляет порядка

$$T \approx \frac{M_G}{M} \omega^{-1}. \quad (88)$$

В нашей же модели мы получили величину

$$T \approx \sqrt{\frac{M_G}{M}} \omega^{-1}. \quad (89)$$

Эта величина дает на пол порядка в отношении масс более быстрое затухание. Данный эффект вызван тем фактом, что все звёзды находятся в резонансе с чёрной дырой. В работе Colpi [19] рассматривается затухание спутника, вращающегося вокруг сферической галактики с квадратичным потенциалом. При применении результатов этой работы к частному случаю спутника, вращающегося с той же частотой, что и звезды галактики, можно получить такую же степенную зависимость времени затухания от массы галактики с показателем 0.5.

Короткую фазу со сверхчандрасекаровским трением можно заметить в работе Gualandris & Merritt [7], однако авторы не обращают на неё внимания.

Стоит заметить, что если начальная скорость чёрной дыры превышает скорость убегания V_{esc} , период колебаний чёрной дыры меняется и становится отличен от $2\pi/\omega$ из-за промежутков времени, в течение которых чёрная дыра находится вне галактики. Из-за этого теряется резонанс между чёрной дырой и звездами, хвост повышенной плотности теперь сбивается по фазе относительно чёрной дыры за пол периода, и трение уменьшается. При этом время затухания будет определяться формулой (88), а не формулой (89).

4.3 Потеря трения после первичного затухания

После фазы с быстрой потерей энергии и короткой симметричной фазы с набором энергии следует длинная фаза с практически отсутствующим трением. Третья фаза уже наблюдалась в работах Gualandris & Merritt [7] и Read et al. [12]. В этом режиме распределение звёзд изменилось достаточно сильно, чтобы изменить вид орбиты чёрной дыры, и она вышла из резонанса со звёздами. Чтобы объяснить этот эффект,

можно обратить внимание на выражение (62). В случае Чандрасекара обмен энергией между чёрной дырой и звездой происходит только один раз. В нашем же случае обмен энергией постоянен, причём он идёт не монотонно по времени, а пропорционален косинусам и синусам величин $\Omega_1 t$ и $\Omega_2 t$. В третьей эти фазы обмена энергией не определены, так как изменилась траектория чёрной дыры. Обмен энергией со звёздами теперь происходит в случайном направлении. Таким образом, средний по звёздам обмен энергией прекращается, и появляется состояние равновесия между чёрной дырой и звездами.

4.4 Окончательное затухание

Наша модель не может описать окончательное затухание чёрной дыры до броуновского уровня. Возмущение распределения звезд никогда не исчезнет, так как для релаксации требуется учёт взаимодействия звезд друг с другом, которым в нашей модели мы пренебрегли. Это взаимодействие является возмущением второго порядка малости, то есть составляет по величине $M/M_G = 10^{-3}$. Таким образом, наша модель не описывает времена порядка $\omega T \approx 10^3$ и больше.

5 Заключение

В данной работе получены аналитические результаты для фазы суперчандрасекаровского трения, уже наблюдавшиеся ранее в численных моделированиях. В результате численного моделирования проверены аналитические результаты для фазы суперчандрасекаровского трения и подтверждено существование третьей фазы, в которой трение мало по сравнению с предсказываемым формулой Чандрасекара, и исследована зависимость средней энергии чёрной дыры в этой фазе от параметров модели. На основе аналитических результатов дано качественное объяснение причин существования этой фазы.

6 Литература

- [1] Chandrasekhar, S., 1943, ApJ, 97, 255
- [2] White, S. D. M., 1976, MNRAS, 174, 467
- [3] Mulder, W. A., 1982, Astr. Astrophys., 117, 9
- [4] Campanelli, M., Lousto, C., Zlochower, Y., & Merritt, D. 2007, ApJ, 659, L5
- [5] González, J. A., Hannam, M., Sperhake, U., Brüggmann, B., & Husa, S. 2007, Phys. Rev. Lett., 98, 231101
- [6] Tichy, W., & Marronetti, P. 2007, Phys. Rev. D, 76, 061502

- [7] Gualandris, A., & Merritt, D., *ApJ*, 678:780Y797, 2008
- [8] Colpi, M., Pallavicini, A., 1998, *ApJ*, 525, 720
- [9] Antonini, F., Merritt, D., *ApJ*, 745, 83, 2011
- [10] Peñarrubia, J., Just, A., Kroupa, P., 2004, *MNRAS*, 349, 747
- [11] Inoue, S., *MNRAS*416:1181-1190, 2011
- [12] Read, J. I., Goerdt, T., Moore, B., Pontzen, A. P., Stadel, J., & Lae, G., *MNRAS*, 2006
- [13] Kleyna, J. T., Wilkinson, M. I., Gilmore, G., Evans, N. W., 2003, *ApJ*, 588, L21
- [14] Tremaine, S., & Weinberg, M. D., 1984, *MNRAS*, 209, 729
- [15] Weinberg, M. D., 1986, *ApJ*, 300, 93
- [16] Binney, J., Tremaine, S., 1950, *Galactic Dynamics*. Princeton University Press
- [17] Bate, R., Mueller, D., White, J., 1971, *Fundamentals of Astrodynamics*
- [18] Lezhnin, K.V., Chernyagin, S.A., 2014, *Astron. Lett.*, 382
- [19] Colpi, M. 1998, *ApJ*, 502, 167 (C98)