Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский физико-технический институт (государственный университет)”

Магистерская диссертация

Sl(2|1) суперсимметричные квантовые цепочки

Студентка 928 гр. Булгакова Д.В.

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Типунин И.Ю.

Москва, 2015 г.

1 Введение

Известны многочисленные приложения конформной теории поля к статистической физике. Напимер, описание статистических свойств критических геометрических моделей (перколляций) или критических точек в моделях невзаимодействующих фермионов в размерности 2+1, переходов между плато в целочисленном квантовом эффекте Холла или, связанном с проблемами перколляций, спиновом квантовом эффекте Холла. Хорошо разработан подход, позваляющий переходить от локальных наблюдаемых в непрерывном пределе к локальным полям. В случае перколляции, все нетривиальные наблюдаемые нелокальны, например, связь в кластере, где корреляционная функция определяется через вероятность данного набора точек принадлежать одному кластеру, или так называемые границы, где рассматривается вероятность, что две точки принадлежат одному кластеру. Описание границ с помощью полностью локальной модели, включающей спины, взаимодействующие с ближайшими соседями, дано в [2], где границы рассматриваются с точки зрения $sl(2|1)$ суперсимметричной спиновой цепочки в непрерывном пределе переходящей в суперсимметричную проективную сигма-модель.

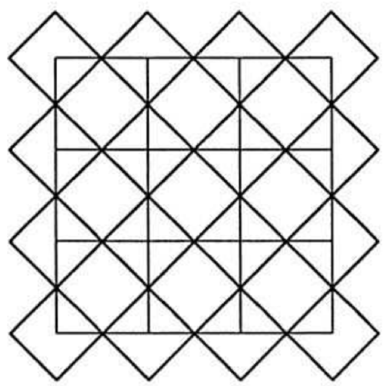


Рис. 1: Средняя решетка в квадратной решетке.

Дадим краткий обзор описания границ перколяционных кластеров. Переформулируем описание в терминах кластеров в описание в терминах петель. Петли можно получить разбив решетку, как показано на Рис. 1. Легко увидеть, что мы получили взаимооднозначное соответствие между петлями и кластерами. Следующим шагом, будем интерпретировать вершины средней решетки как взаимодействия. Конкретно, рассмотрим распространение в вертикальном направлении на нашем рисунке и будем считать, что каждое ребро переносит цвет c_i, соответствующий бозону или фермиону. Две возможные вершины изображены на Рис. 2, где $|c_i|$ равен нулю, если переносится бозон, и единице, если фермион. Результирующий вес есть число бозонов минус число фермионов.

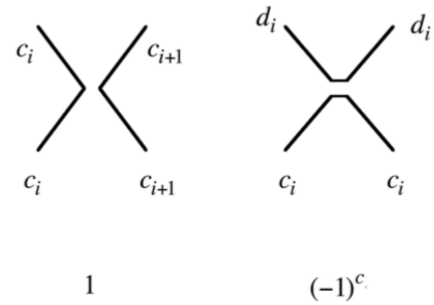


Рис. 2: Больцмановские веса в диаграммах без взаимодействия и с взаимодействием.

С каждым ребром средней решетки мы можем сопоставить $\mathbb{Z}_2$ градуированное векторное пространство размерности $(2|1)$, то есть бозонное (соотв. фермионное) пространство размерности 2 (соотв. 1). Для четных и нечетных граней выберем фундаментальное и дуальное представления супералгебры Ли $sl(2|1)$. Различие между четными и нечетными гранями можно интерпретировать как выбор ориентации петель.

Далее мы можем ввести бозонные и фермионные операторы рождения-уничтожения. Генераторы супералгебры Ли $sl(2|1)$, действующие на каждом узле, билинейны по этим опереаторам. Из билинейных форм мы можем составить выражения, инвариантные относительно $sl(2|1)$. Обозначим через e_i произведения этих выражений. Генераторы e_i определяют представление алгебры Темперли-Либа, подалгебры алгебры Walled Brauer.

Взаимодействие в узле, где встречаются i и $i+1$ задается трансфер-матрицей $T_i = 1 + e_i$. В термодинамичнском пределе мы можем заменить описание через трансфер-матрицу на гамильтониан следующим образом $H = -\sum_i e_i$.

Фундаментальный вопрос, который обычно задают в LCFT - это определение операторного произведения (OPE) квантовых полей. Благодаря конформной симметрии операторные произведения можно определить как тензорные произведения соответствующих модулей алгебры Вирасоро. Существуют

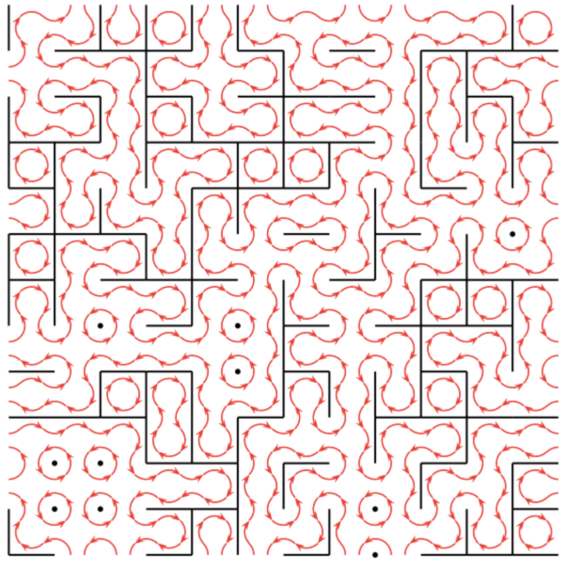


Рис. 3: Пример ориентации петель.

несколько способов решения проблемы о вычислении тензорных произведений. Один из них, так называемый "решеточный подход"состоит в исследовании 1+1D спиновых цепочек в критических точках. Этот подход основан на соответствии между теорией представлений ассоциативных алгебр на решетке и алгебры Вирасоро в континуальном пределе. Впервые это было рассмотренно в работах [13, 14]: система категорий модулей алгебры Темперли-Либа, обозначаемых числом сайтов в спиновой цепочке, в непрерывном пределе принадлежала к категории Вирасоро-модулей. Изучение таких "решеточных алгебр"дает глубокое понимание сложной структуры непрерывного предела.

В настоящей работе мы хоти исследовать более общий случай $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ - квантовой деформации алгебры $sl(2|1)$. Который в случае перколляции может характеризовать, например, случай неодинаковых вероятностей по разным направлениям в решетке. Мы делаем первый шаг и даем математическое описание $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ спиновой цепочки, в частности, структуру бимодуля над $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ и ее централизатором квантовой Walled Brauer алгеброй [16].

2 Алгебра $\overline{U}_q \boldsymbol{sl}(2|1)$

2.1 Определение of $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$

Алгебра Хопфа $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ - ассоциативная алгебра с единицей, порожденная генераторами B, F, k, K, C, E. Мы хотим рассмотреть случай произвольного значения параметра деформации q, то есть он не является корнем из единицы. В $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ содержится важная подалгебра $\mathcal{U}_q s\ell(2)$, которая порождена генераторми E, K,F и соотношениями

$$KF = \mathfrak{q}^{-2}FK, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1}}, \quad KE = \mathfrak{q}^2 EK. \tag{1}$$

$\mathcal{U}_q s\ell(2)$ и k порождают большую подалгебру $U_q^* sl(2)$ с соотношениями

$$kF = \mathfrak{q}Fk, \quad kE = \mathfrak{q}^{-1}Ek, \quad kK = Kk. \tag{2}$$

Оставшиеся соотношения включают фермионы B и C

$$\begin{gathered} kB = -Bk, \quad KB = \mathfrak{q}BK, \quad kC = -Ck, \quad KC = \mathfrak{q}^{-1}CK, \\ B^2 = 0, \quad BC - CB = \frac{k - k^{-1}}{\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1}}, \quad C^2 = 0, \\ FC - CF = 0, \qquad BE - EB = 0, \\ FFB - [2]FBF + BFF = 0, \quad EEC - [2]ECE + CEE = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где мы обозначаем q-целые как

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Структура алгебры Хорфа $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ (т.е. копроизведение, антипод, и коединица) задается следующим образом

$$\begin{aligned} &\Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, \qquad \Delta(E) = E \otimes K + \mathbf{1} \otimes E, \\ &\Delta(B) = B \otimes 1 + k^{-1} \otimes B, \qquad \Delta(C) = C \otimes k + \mathbf{1} \otimes C, \end{aligned} \tag{4}$$

$$S(B) = -kB, \quad S(F) = -KF, \quad S(C) = -Ck^{-1}, \quad S(E) = -EK^{-1}, \tag{5}$$

$$\epsilon(B) = 0, \quad \epsilon(F) = 0, \quad \epsilon(C) = 0, \quad \epsilon(E) = 0, \tag{6}$$

где k и K group-like.

2.2 Простые $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ модули

У алгебры $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ есть следующий набор простых модулей

$$\mathcal{Z}_{s,r}^{\alpha,\beta}, \qquad \alpha,\beta=\pm 1, \quad s\geqslant 1, \quad r\in\mathbb{Z},$$

с размерностями

$$\dim \mathcal{Z}_{s,r}^{\alpha,\beta} = \begin{cases} 2s-1, & r=0, \\ 2s+1, & r=s, \\ 4s, & r\neq 0,s. \end{cases} \tag{7}$$

Модули с $r=0$, s будем называть атипическими, остальные - типическими.

2.2.1 Описание простых $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$-модулей

Опишем действие $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ на простых модулях явно, используя базис относительно разложения по $U_q^* sl(2)$-модулям. Каждый $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$-модуль можно разложить в прямую сумму $U_q^* sl(2)$-модулей $\mathcal{X}_{s,r}^{\alpha,\beta}$, где α, $\beta=\pm$, $s\geqslant 1$, $r\in\mathbb{Z}$.

Атипические модули $r=0$. Как модули над $U_q^* sl(2)$ они разлагаются в прмую сумму следующим образом

$$\mathcal{Z}_{s,0}^{\alpha,\beta} = \mathcal{X}_{s,0}^{\alpha,\beta} \oplus \mathcal{X}_{s-1,-1}^{\alpha,\beta}, \tag{8}$$

в соответствии с этим разложение мы можем выбрать базис в $\mathcal{Z}_{s,0}^{\alpha,\beta}$ как

$$\left(|\alpha,s;\beta,0\rangle_n^{\leftarrow} \in \mathcal{X}_{s,0}^{\alpha,\beta}\right)_{0\leqslant n\leqslant s-1}, \qquad \left(|\alpha,s;\beta,0\rangle_m^{\rightarrow} \in \mathcal{X}_{s-1,-1}^{\alpha,\beta}\right)_{0\leqslant m\leqslant s-2}.$$

Фермионные генераторы связывают эти два типа векторов следующим образом

$$B|\alpha,s,\beta,0\rangle_n^{\leftarrow} = -[n]|\alpha,s,\beta,0\rangle_{n-1}^{\rightarrow}, \qquad C|\alpha,s,\beta,0\rangle_m^{\rightarrow} = \beta|\alpha,s,\beta,0\rangle_{m+1}^{\leftarrow}.$$

Атипические модули $s=r$. Модули разлагаются как

$$\mathcal{Z}_{s,s}^{\alpha,\beta} = \mathcal{X}_{s,s}^{\alpha,\beta} \oplus \mathcal{X}_{s+1,s}^{\alpha,-\beta} \tag{9}$$

и мы можем выбрать следующий базис в $\mathcal{Z}_{s,s}^{\alpha,\beta}$:

$$\left(|\alpha,s;\beta,s\rangle_n^{\leftarrow} \in \mathcal{X}_{s,s}^{\alpha,\beta}\right)_{0\leqslant n\leqslant s-1}, \qquad \left(|\alpha,s;\beta,s\rangle_m^{\rightarrow} \in \mathcal{X}_{s+1,s}^{\alpha,-\beta}\right)_{0\leqslant m\leqslant s}.$$

Действие фермионов

$$B|\alpha,s,\beta,s\rangle_n^{\leftarrow}=[s-n]|\alpha,s,\beta,s\rangle_n^{\rightarrow},\qquad C|\alpha,s,\beta,s\rangle_m^{\rightarrow}=\beta|\alpha,s,\beta,s\rangle_m^{\leftarrow}.$$

Типические модули $r\neq 0,s$ Модули разлагаются как

$$\mathcal{Z}_{s,r}^{\alpha,\beta}=\mathcal{X}_{s,r}^{\alpha,\beta}\oplus\mathcal{X}_{s+1,r}^{\alpha,-\beta}\oplus\mathcal{X}_{s-1,r-1}^{\alpha,-\beta}\oplus\mathcal{X}_{s,r-1}^{\alpha,\beta}.$$

Выбираем в $\mathcal{Z}_{s,r}^{\alpha,\beta}$ следующий базис

$$\begin{aligned}&\left(|\alpha,s;\beta,r\rangle_j^{\leftarrow}\right)_{0\leqslant j\leqslant s-1},\ \left(|\alpha,s;\beta,r\rangle_m^{\uparrow}\right)_{0\leqslant m\leqslant s},\\ &\qquad\qquad\left(|\alpha,s;\beta,r\rangle_n^{\downarrow}\right)_{0\leqslant n\leqslant s-2},\ \left(|\alpha,s;\beta,r\rangle_j^{\rightarrow}\right)_{0\leqslant j\leqslant s-1}.\end{aligned}\tag{10}$$

Действие фермионов

$$\begin{aligned}&B|\alpha,s,\beta,r\rangle_j^{\leftarrow}=\tfrac{[j]}{[s]}|\alpha,s,\beta,r\rangle_{j-1}^{\downarrow}+\beta\tfrac{[r][s-j]}{[s]}|\alpha,s,\beta,r\rangle_j^{\uparrow},\\ &B|\alpha,s,\beta,r\rangle_m^{\uparrow}=[m]|\alpha,s,\beta,r\rangle_{m-1}^{\rightarrow},\qquad C|\alpha,s,\beta,r\rangle_m^{\uparrow}=|\alpha,s,\beta,r\rangle_m^{\leftarrow},\\ &B|\alpha,s,\beta,r\rangle_n^{\downarrow}=\beta[r][n+1-s]|\alpha,s,\beta,r\rangle_n^{\rightarrow},\quad C|\alpha,s,\beta,r\rangle_n^{\downarrow}=\beta[r-s]|\alpha,s,\beta,r\rangle_{n+1}^{\leftarrow},\\ &C|\alpha,s,\beta,r\rangle_j^{\rightarrow}=\tfrac{1}{[s]}|\alpha,s,\beta,r\rangle_j^{\downarrow}+\beta\tfrac{[s-r]}{[s]}|\alpha,s,\beta,r\rangle_{j+1}^{\uparrow}.\end{aligned}$$

2.3 Группы расширений Ext^1 для атипических модулей

Для типических $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$-модулей группа Ext^1 отсутствует, рассмотрим только атипические модули. Для двух модулей $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ определим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Z}_2,\mathcal{Z}_1)$ как линейное пространство с базисом совпадающим с короткой точной последовательностью

$$0\to\mathcal{Z}_1\to\mathcal{Z}_1\rtimes\mathcal{Z}_2\to\mathcal{Z}_2\to 0$$

Действие генераторов $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ на $\mathcal{Z}_1\rtimes\mathcal{Z}_2$ задается как

$$\rho_A=\rho_A^{(0)}+\xi_A$$

где $\rho_A^{(0)}$ прямая сумма действия генераторов $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ на простых модулях и $\xi_A=\xi_A^{\mathcal{Z}_1,\mathcal{Z}_2}:\mathcal{Z}_1\to\mathcal{Z}_2$ - линейные отображения.

Группа $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Z}_1,\mathcal{Z}_2)$ для атипических модулей имеет размерность 1 или 0. Ниже дан список действий ξ_A для ненулевых Ext^1 пространств, где мы выбираем базисный вектор в каждом пространстве. Исключения составляют случаи, когда один из модулей $\mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{1,0}$. Эти случаи можно включить в общую картину, используя предположение $\mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{0,0} = \mathcal{Z}^{\alpha,-\beta}_{1,0}$ и $|\alpha,0,\beta,0\rangle^{\rightarrow}_{0} = |\alpha,1,-\beta,0\rangle^{\leftarrow}_{0}$, $|\alpha,0,\beta,0\rangle^{\leftarrow}_{m} = 0$, $m \neq 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ext}^1(\mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{s,0},\mathcal{Z}^{\alpha,-\beta}_{s+1,0}) = \{b_{s+1}\}, && \xi_B : |\alpha,s,\beta,0\rangle^{\leftarrow}_{m} \mapsto -[s-m]|\alpha,s+1,-\beta,0\rangle^{\leftarrow}_{m},\\
&\qquad (s \geqslant 1) && \xi_B : |\alpha,s,\beta,0\rangle^{\rightarrow}_{m} \mapsto [s-m-1]|\alpha,s+1,-\beta,0\rangle^{\rightarrow}_{m},\\
&\operatorname{Ext}^1(\mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{s,0},\mathcal{Z}^{\alpha,-\beta}_{s-1,0}) = \{c_{s-1}\}, && \xi_C : |\alpha,s,\beta,0\rangle^{\leftarrow}_{m} \mapsto |\alpha,s-1,-\beta,0\rangle^{\leftarrow}_{m},\\
&\qquad (s \geqslant 2) && \xi_C : |\alpha,s,\beta,0\rangle^{\rightarrow}_{m} \mapsto |\alpha,s-1,-\beta,0\rangle^{\rightarrow}_{m},\\
&\operatorname{Ext}^1(\mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{s,s},\mathcal{Z}^{\alpha,-\beta}_{s-1,s-1}) = \{b_{s-1}\}, && \xi_B : |\alpha,s,\beta,s\rangle^{\leftarrow}_{m} \mapsto -[m]|\alpha,s-1,-\beta,s-1\rangle^{\leftarrow}_{m-1},\\
&\qquad (s \geqslant 1) && \xi_B : |\alpha,s,\beta,s\rangle^{\rightarrow}_{m} \mapsto [m]|\alpha,s-1,-\beta,s-1\rangle^{\rightarrow}_{m-1},\\
&\operatorname{Ext}^1(\mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{s,s},\mathcal{Z}^{\alpha,-\beta}_{s+1,s+1}) = \{c_{s+1}\}, && \xi_C : |\alpha,s,\beta,s\rangle^{\leftarrow}_{m} \mapsto |\alpha,s+1,-\beta,s+1\rangle^{\leftarrow}_{m+1},\\
&\qquad (s \geqslant 0) && \xi_C : |\alpha,s,\beta,s\rangle^{\rightarrow}_{m} \mapsto |\alpha,s+1,-\beta,s+1\rangle^{\rightarrow}_{m+1},
\end{aligned}$$

2.4 Проективные $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ модули

Единственный возможный тип проетивных модулей - это проективные накрытия атипических модулей, которые мы обозначим как $\mathcal{R}^{\alpha,\beta}_{s,0}$ и $\mathcal{R}^{\alpha,\beta}_{s,s}$, где $\alpha,\beta = \pm 1$, $s \geqslant 1$. Для $\mathcal{R}^{\alpha,\beta}_{s,0}$ Loewy граф следующий

$$\begin{tikzcd}
& \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ s & 0\end{smallmatrix}\right) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\beta\\ s+1 & 0\end{smallmatrix}\right) \arrow[dr] & & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\beta\\ s-1 & 0\end{smallmatrix}\right) \arrow[dl] \\
& \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ s & 0\end{smallmatrix}\right) &
\end{tikzcd} \tag{11}$$

И такой же для $\mathcal{R}^{\alpha,\beta}_{s,s}$

$$\begin{tikzcd}
 & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ s & s\end{smallmatrix}\right) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\beta\\ s+1 & s+1\end{smallmatrix}\right) \arrow[dr] & & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\beta\\ s-1 & s-1\end{smallmatrix}\right) \arrow[dl] \\
 & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ s & s\end{smallmatrix}\right) &
\end{tikzcd} \tag{12}$$

где $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ s & r\end{smallmatrix}\right) = \mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{s,r}$ - простые подфакторы, а стрелки - соответствующие $\mathrm{Ext}^{\mathbf{1}}$.

Из предположения $\mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{0,0} = \mathcal{Z}^{\alpha,-\beta}_{1,0}$ в предыдущем разделе следуют два исключения. Графы для $\mathcal{R}^{\alpha,\beta}_{1,0}$ and $\mathcal{R}^{\alpha,\beta}_{1,1}$ имеют следующий вид

$$\begin{tikzcd}
 & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\beta\\ 2 & 0\end{smallmatrix}\right) \arrow[dr] & & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right) \arrow[dl] & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\beta\\ 2 & 2\end{smallmatrix}\right) \arrow[dr] & & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \arrow[dl] \\
 & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) & & & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right) &
\end{tikzcd} \tag{13}$$

2.5 Люстиговский предел $L\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$

Генераторы алгебры B, F, k, K, C, E, e, f, h. Опишем соотношения в алгебре. Предварительно заметим, что $LU_qsl(2|1)$ содержит идеал $U_qsl(2|1)$ и подалгебру $sl(2)$.

Генераторы $U_qsl(2|1)$ уже были описаны в начале этого раздела. Теперь расширим $U_qsl(2|1)$ элементами e, f, h, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям из $sl(2)$:

$$[h, e] = e, \qquad [h, f] = -f, \qquad [e, f] = 2h \tag{14}$$

И коммутируют с генераторами $U_q sl(2|1)$ следующим образом

$$[h,K]=0,\qquad [E,e]=0,\qquad [K,e]=0,\qquad [F,f]=0,\qquad [K,f]=0,\tag{15}$$

$$[F,e]=\frac{1}{[p-1]!}K^p\frac{qK-q^{-1}K^{-1}}{q-q^{-1}}E^{p-1},\tag{16}$$

$$[E,f]=\frac{(-1)^{p+1}}{[p-1]!}F^{p-1}\frac{qK-q^{-1}K^{-1}}{q-q^{-1}},\tag{17}$$

$$[h,E]=\frac{1}{2}EA,\qquad [h,F]=-\frac{1}{2}AF\tag{18}$$

где

$$A=\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(u_s(q^{-s-1})-u_s(q^{s-1}))K+q^{s-1}u_s(q^{s-1})-q^{-s-1}u_s(q^{-s-1})}{(q^{s-1}-q^{-s-1})u_s(q^{-s-1})u_s(q^{s-1})}u_s(K)e_s,$$

а $u_s(K)=\prod_{n=1,\,n\neq s}^{p-1}(K-q^{s-1-2n})$ и e_s - центральные идемпотенты $U_q sl(2|1)$. Соотношения e, f, h с k и фермионными генераторами $U_q sl(2|1)$ следующие

$$fE-Ef=0\tag{19}$$

$$fk+kf=0\tag{20}$$

$$eB+Be=0\tag{21}$$

$$ek+ke=0\tag{22}$$

$$fB+Bf=\frac{(-1)^p}{[p-1]!}F^{p-1}BF\tag{23}$$

$$eC-Ce=\frac{1}{[p-1]!}K^pE^{p-1}CE\tag{24}$$

$$hC-Ch=\frac{(-1)^{p-1}}{2[p-1]!}K^p\Big(\frac{1}{[p-1]!}E^{p-1}F^{p-1}\frac{q^2K-q^{-2}K^{-1}}{q-q^{-1}}C+\tag{25}$$

$$+\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(-1)^s}{[p-s]!}[p-1]E^{p-s-1}F^{p-s}\prod_{r=1}^{s}\frac{q^{r-2}K-q^{2-r}K^{-1}}{q-q^{-1}}CE\Big)$$

$$hB-Bh=\frac{(-1)^{p-1}}{2[p-1]!}K^p\Big(\frac{1}{[p-1]!}F^{p-1}\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}E^{p-1}B+\tag{26}$$

$$+\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(-1)^s}{[p-s]!}[p-1]E^{p-s}F^{p-s-1}\prod_{r=1}^{s}\frac{q^rK-q^{-r}K^{-1}}{q-q^{-1}}BF\Big)$$

Структура алгебры Хопфа на e, f and h задается следующими соотношениями

$$\Delta(e) = e \otimes 1 + K^p \otimes e + \frac{1}{[p-1]!} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{q^{r(p-r)}}{[r]} K^p E^{p-r} \otimes E^r K^{-r}, \tag{27}$$

$$\Delta(f) = f \otimes 1 + K^p \otimes f + \frac{(-1)^p}{[p-1]!} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{q^{-s(p-s)}}{[s]} K^{p+s} F^s \otimes F^{p-s}, \tag{28}$$

и

$$S(e) = -K^p e, \qquad S(f) = -K^p f, \qquad S(h) = -h, \tag{29}$$

$$\epsilon(e) = \epsilon(f) = \epsilon(h) = 0, \tag{30}$$

3 Спиновая цепочка

Простые $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$-модули минимальной размерности (большей единицы) - это модули размерности 3. Далее будем обозначать два возможных модуля размерности 3 как $\mathbf{3} = \mathcal{Z}_{1,1}^{\alpha,-\beta}$ и $\overline{\mathbf{3}} = \mathcal{Z}_{2,0}^{\alpha,\beta}$.

Определим спиновую цепочку как $(m+n)$-кратное тензорное произведение

$$\mathcal{M}(m,n) = \mathbf{3}^{\otimes m} \otimes \overline{\mathbf{3}}^{\otimes n} \tag{31}$$

3.1 Тензорные произведения модулей

Вследствие того, что $U_q sl(2|1)$ - алгебра Хопфа, тензорное произведение любых двух $U_q sl(2|1)$-модулей так же представляют собой $U_q sl(2|1)$-модули и могут быть разложены в прямую сумму. Ввиду громоздкости формул и разнообразия случаев, мы не будем приводить здесь весь список тензорных произведений, а ограничимся только теми, которые понадобятся нам для дальнейшего исследования свойств цепочки. Следовательно рассмотрим тензорные произведения $Z_{1,1}^{\alpha,\beta}$ and $Z_{2,0}^{\alpha,\beta}$ со всеми неприводимыми модулями.
Для $Z_{1,1}^{\alpha,\beta}$ имеем

$$Z_{s,r}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} = \begin{cases} Z_{s,r+1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s+1,r+1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s-1,r}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}, & r \neq -1, 0, s-1, s \\ R_{s+1,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s-1,-1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}, & r = -1 \\ Z_{s-1,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}, & r = 0 \\ R_{s-1,s-1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s+1,s}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}, & r = s-1 \\ Z_{s+1,s+1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s,s+1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}, & r = s \end{cases}$$

$$R_{s,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} = R_{s-1,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + 2Z_{s,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s-1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s+1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}$$

$$R_{s,s}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} = R_{s+1,s+1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + 2Z_{s,s+1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s-1,s}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s+1,s+2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}$$

где $\alpha_{12} = \alpha_1\alpha_2$, $\beta_{12} = \beta_1\beta_2$. И для $Z_{2,0}^{\alpha,\beta}$ имеем

$$Z_{s,r}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} = \begin{cases} Z_{s+1,r}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s,r-1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s-1,r-1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}, & r \neq 0, 1, s, s+1 \\ Z_{s+1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s-1,-1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}, & r = 0 \\ R_{s,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s+1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}, & r = 1 \\ Z_{s-1,s-1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s+1,s}^{\alpha_{12},\beta_{12}}, & r = s \\ R_{s,s}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s-1,s}^{\alpha_{12},\beta_{12}} & r = s+1 \end{cases}$$

$$R_{s,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} = R_{s+1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + 2Z_{s-1,-1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s,-1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s-2,-1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}$$

$$R_{s,s}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} = R_{s-1,s-1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + 2Z_{s+1,s}^{\alpha_{12},\beta_{12}} + Z_{s+2,s+1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} + Z_{s,s-1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}$$

4 Квантовая Walled Brauer алгебра

4.1 Централизатор $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$

Вместо громоздких обозначений из раздела (2.2.1.) для базисных векторов в $\mathbf{3}$ и $\overline{\mathbf{3}}$ модулях будем использовать следующие

$$
\begin{matrix} & f_2 = |\alpha,1;-\beta,1\rangle_0^{\rightarrow} & & v_1 = |\alpha,2;\beta,0\rangle_0^{\leftarrow} & \\ f_1 = |\alpha,1;-\beta,1\rangle_0^{\leftarrow} & & \text{и} & & v_3 = |\alpha,2;\beta,0\rangle_0^{\rightarrow} \\ & f_3 = |\alpha,1;-\beta,1\rangle_1^{\rightarrow} & & v_2 = |\alpha,2;\beta,0\rangle_1^{\leftarrow} & \end{matrix}
$$

Рассмотрим операторы коммутирующие с $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g} &: \mathbf{3}\otimes\mathbf{3} \mapsto \mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\\
\mathbf{h} &: \overline{\mathbf{3}}\otimes\overline{\mathbf{3}} \mapsto \overline{\mathbf{3}}\otimes\overline{\mathbf{3}}\\
\mathcal{E} &: \mathbf{3}\otimes\overline{\mathbf{3}} \mapsto \mathbf{3}\otimes\overline{\mathbf{3}}
\end{aligned}
$$

Выпишем их действие на базисные вектора явно

$$
\mathbf{g}: \begin{pmatrix} f_1\otimes f_1 & f_1\otimes f_2 & f_1\otimes f_3\\ f_2\otimes f_1 & f_2\otimes f_2 & f_2\otimes f_3\\ f_3\otimes f_1 & f_3\otimes f_2 & f_3\otimes f_3 \end{pmatrix} \mapsto
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathfrak{q}^{-2} f_1\otimes f_1 & -\mathfrak{q}^{-1} f_2\otimes f_1 & -\mathfrak{q}^{-1} f_3\otimes f_1\\ (\mathfrak{q}^{-2}-1) f_2\otimes f_1 - \mathfrak{q}^{-1} f_1\otimes f_2 & -f_2\otimes f_2 & -\mathfrak{q}^{-1} f_3\otimes f_2\\ (\mathfrak{q}^{-2}-1) f_3\otimes f_1 - \mathfrak{q}^{-1} f_1\otimes f_3 & (\mathfrak{q}^{-2}-1) f_3\otimes v_2 - \mathfrak{q}^{-1} f_2\otimes f_3 & -f_3\otimes f_3 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{h}: \begin{pmatrix} v_1\otimes v_1 & v_1\otimes v_2 & v_1\otimes v_3\\ v_2\otimes v_1 & v_2\otimes v_2 & v_2\otimes v_3\\ v_3\otimes v_1 & v_3\otimes v_2 & v_3\otimes v_3 \end{pmatrix} \mapsto
$$

$$
\begin{pmatrix} -v_1\otimes v_1 & -\mathfrak{q}^{-1} v_2\otimes v_1 & -\mathfrak{q}^{-1} v_3\otimes v_1\\ (\mathfrak{q}^{-2}-1) v_2\otimes v_1 - \mathfrak{q}^{-1} v_1\otimes v_2 & -v_2\otimes v_2 & -\mathfrak{q}^{-1} v_3\otimes v_2\\ (\mathfrak{q}^{-2}-1) v_3\otimes v_1 - \mathfrak{q}^{-1} v_1\otimes v_3 & (\mathfrak{q}^{-2}-1) v_3\otimes v_2 - \mathfrak{q}^{-1} v_2\otimes v_3 & \mathfrak{q}^{-2} v_3\otimes v_3' \end{pmatrix}.
$$

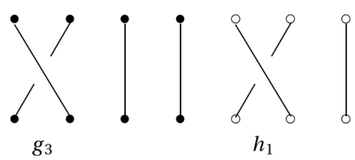
и

$$
\mathcal{E} \ : \ \begin{pmatrix} f_1\otimes v_1 & f_1\otimes v_2 & f_1\otimes v_3\\ f_2\otimes v_1 & f_2\otimes v_2 & f_2\otimes v_3\\ f_3\otimes v_1 & f_3\otimes v_2 & f_3\otimes v_3 \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -q & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(f_3\otimes v_1 - q f_2\otimes v_2 - q^2 f_1\otimes v_3\right)
$$

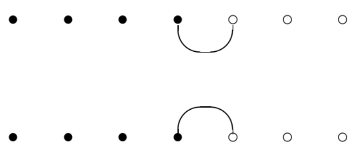
Определим операторы на цепочке $\mathcal{M}(m,n)$ следующим образом

$$\mathbf{g}_j = \underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}}_{m-j-1}\otimes\mathbf{g}\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}}_{n+j-1}$$
$$\mathbf{h}_i = \underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}}_{m+i-1}\otimes\mathbf{h}\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}}_{n-i-1}$$
$$\mathcal{E} = \underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}}_{m-1}\otimes\mathcal{E}\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}}_{n-1}$$

Генераторы $\mathcal{E}$, $\mathbf{g}_j$ и $\mathbf{h}_i$ можно изобразить графически, $\mathbf{g}_3$ and $\mathbf{h}_1$, например, выглядят как



И соответственно $\mathcal{E}$



Алгебра, порожденная генераторами $\mathcal{E}$, g_j, h_i, где $1\leqslant j\leqslant m-1$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, квантовая walled Brauer алгебра (q$\mathcal{WB}$).

4.2 q$\mathcal{WB}$ модули

Как описано в [5], все простые q$\mathcal{WB}(m,n)$ модули нумеруются парами диаграмм Юнга $\left[\lambda_1,\lambda_2\right]$, $m-|\lambda_1| = n-|\lambda_2|\geqslant 0$, где $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ - число боксов в λ_1 и λ_2 диаграммах.

5 Спиновая цепочка как бимодуль

Получим разложение цепочки как бимодуль над парой $\mathrm{q}\mathcal{WB} \boxtimes U_q sl(2|1)$ взаимных централизаторов.

Чтобы сделать ответ более наглядным, сделаем замену $t = s - r$, тогда $Z^{\alpha,\beta}_{s,r}$ запишется как $Z^{\alpha,\beta}_{t,r}$. В бимодуле могут встречаться только диаграммы содержащие две первые строки и один столбец. Для таких диаграмм, показанных на Рис. 4 мы используем следующие обозначения:

$$\lambda_m(s,k) = (s+k, k+1, 1^{m-s-2k-1})$$

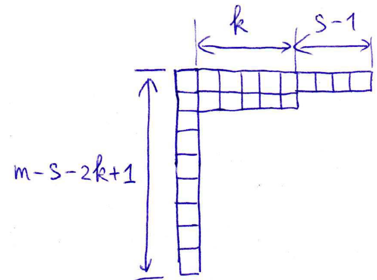


Рис. 4: Диаграмма $\lambda_m(s,k)$

Получим следующее разложение:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{m,n} = & \bigoplus_{i=0}^{\min(m,n)-1} \bigoplus_{x=0}^{m-i-1} \left[\lambda_{m-i}(m-i-x,0),\ \lambda_{n-i}(n-i,0)\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,(-1)^{x+2i+1}}_{n-x-i,m-i} \oplus \\
& \bigoplus_{i=0}^{\min(m,n)-1} \bigoplus_{x=1}^{n-i-1} \left[\lambda_{m-i}(m-i,0),\ \lambda_{n-i}(n-i-x,0)\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,(-1)^{x+2i+1}}_{n-i,m-x-i} \oplus \\
& \bigoplus_{i=1}^{\min(m,n)-1} \bigoplus_{x=0}^{\min(i,n-i)-1} \left[\lambda_{m-i+x+1}(1,0),\ \lambda_{n-i+x+1}(n-i-x,x)\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,(-1)^{m+x+i+1}}_{n-m-x,m-i} \oplus \\
& \bigoplus_{i=1}^{\min(m,n)-1} \bigoplus_{x=0}^{\min(i,m-i)-1} \left[\lambda_{m-i+x+1}(m-i-x,x),\ \lambda_{n-i+x+1}(1,0)\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,(-1)^{n+x+i+1}}_{n-i,m-n-x} \oplus \\
& \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{m-n}{2} \rfloor -1} \bigoplus_{x=1}^{m-n-2i-1} \left[\lambda_{m-n}(x,i),\ 0\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,(-1)^{m+n-x+1}}_{n-m+x+i,m-n-i} \oplus \\
& \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor -1} \bigoplus_{x=1}^{n-m-2i-1} \left[0,\ \lambda_{n-m}(x,i)\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,(-1)^{m+n-x+1}}_{n-m-i,m-n+x+i} \oplus \\
& \bigoplus_{i=1}^{\lfloor \frac{m-n-1}{2} \rfloor} \bigoplus_{x=1}^{\min(n,m-n-2i)} \left[\lambda_{m-n+x}(m-n-x-2i+1,x+i-1),\ \lambda_x(1,0)\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,(-1)^{2n+x+2i}}_{-i,m-n-x-i+1} \\
& \bigoplus_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-1}{2} \rfloor} \bigoplus_{x=1}^{\min(m,n-m-2i)} \left[\lambda_x(1,0),\ \lambda_{n-m+x}(n-m-x-2i+1,x+i-1)\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,(-1)^{2m+x+2i}}_{n-m-x-i+1,-i} \\
& \bigoplus_{i=1}^{\min(m-n,n)-1} \left[\lambda_{m-n+i+1}(m-n-i,i), \lambda_{i+1}(1,0)\right] \boxtimes \mathcal{R}^{1,(-1)^{2n+i+1}}_{m-n-i,m-n-i} \oplus \\
& \bigoplus_{i=1}^{\min(n-m,m)-1} \left[\lambda_{i+1}(1,0),\ \lambda_{n-m+i+1}(n-m-i,i)\right] \boxtimes \mathcal{R}^{1,(-1)^{2m+i+1}}_{n-m-i+1,0} \oplus \\
& \oplus \left[\lambda_{m-n}(m-n,0), 0\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,-1}_{m-n,m-n} \oplus \left[0, \lambda_{n-m}(n-m,0)\right] \boxtimes \mathcal{Z}^{1,1}_{n-m+1,0}
\end{aligned}
$$

Для простоты в первую и третью суммы мы включили члены $\mathcal{Z}^{\alpha,\beta}_{0,r}$, появляющиеся при некоторых значениях m, n, i, x. Для таких членов мы предполагаем

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}_{0,r}^{\alpha,\beta} \equiv \mathcal{R}_{r-1,r-1}^{\alpha,\beta}, \quad r \neq 1\\
&\mathcal{Z}_{0,1}^{\alpha,\beta} = \mathcal{R}_{1,0}^{\alpha,-\beta}, \quad m \neq n\\
&\mathcal{Z}_{0,1}^{\alpha,\beta} = \mathcal{Z}_{1,0}^{\alpha,-\beta}, \quad \big[\lambda_2(1,\,0),\,\lambda_2(1,\,0)\big] = \big[0,\,0\big], \quad m = n
\end{aligned}
$$

Для членов во второй и четвертой суммах, когда возникает $\mathcal{Z}_{t,0}^{\alpha,\beta}$, мы считаем $\mathcal{Z}_{t,0}^{\alpha,\beta} \equiv \mathcal{R}_{t,0}^{\alpha,\beta}$.

6 Тензорные произведения при p=2 и 3

Так как случаи, когда параметр q равен корню из единицы, представляют наибольший физический интерес, рассмотрим так же классификацию модулей и их тензорное произведение в важных случаях p=2 и 3.

Для p равного 2 или 3 существуют следующие модули:
p=2: три атипических $Z_{1,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{1,1}^{\alpha,\beta}$ и один Стейнберг $Z_{2,1}^{\alpha,\beta}$
p=3: пять атипических $Z_{1,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{3,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{1,1}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,2}^{\alpha,\beta}$, два типических $Z_{1,2}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,1}^{\alpha,\beta}$ и два Стейнберга $Z_{3,1}^{\alpha,\beta}$, $Z_{3,2}^{\alpha,\beta}$

6.1 $p = 2$

Тензорное произведение неприводимых модулей раскладывается в прямую сумму так называемых наклонных модулей (класс модулей на которых замыкаются тензорные произведения неприводимых), которая содержит неприводимые модули, проективные модули и некоторые специальные неразложимые модули, которые являются частями проективных.

Для $p = 2$ существуют следующие tilting-модули

- неприводимые модули $Z_{1,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{1,1}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,1}^{\alpha,\beta}$
- проективные модули $Q_{1,0}^{\alpha,\beta}$, $Q_{2,0}^{\alpha,\beta}$, $Q_{1,1}^{\alpha,\beta}$
- и модули $P_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ and $P_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$, которые можно реализовать как подмодули проективных $Q_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и $Q_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ соответсвенно и $P_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и $\bar{P}_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$, который можно реализовать как подмодуль $Q_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$. Графы этих модулей показаны на рисунках 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4. в приложении.

Тензорные произведения неприводимых на неприводимые

$$
\begin{aligned}
Z_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{s,r}^{\alpha_2,\beta_2} &= Z_{s,r}^{\alpha_{12},\beta_{12}}\\
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= P_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}\\
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Z_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}\\
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}}\\
Z_{1,1}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= P_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}\\
Z_{1,1}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{1,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}}\\
Z_{2,1}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}}
\end{aligned}
$$

неприводимых на $P_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и $P_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$

$$
\begin{aligned}
P_{2,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{1,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}\\
P_{2,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= P_{1,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}\\
P_{1,1}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}\\
P_{1,1}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= \bar{P}_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}
\end{aligned}
$$

и неприводимых на $P_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и $\bar{P}_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$

$$
\begin{aligned}
P_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= P_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{2,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{2,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{2,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}\\
P_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= P_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus P_{2,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus P_{2,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}\\
\bar{P}_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= P_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{2,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{2,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{2,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}\\
\bar{P}_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= P_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}
\end{aligned}
$$

Тензорное произведение $P_{1,1}^{\alpha_1,\beta_1}$, $P_{2,0}^{\alpha_1,\beta_1}$, $P_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1}$ и $\bar{P}_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1}$ с самими собой

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes \bar{P}_{1,0}^{\alpha_2,\beta_2} =& 2\bar{P}_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 3P_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2P_{1,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2P_{1,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2P_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus \\
&\oplus 2Z_{2,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
\bar{P}_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{1,0}^{\alpha_2,\beta_2} =& P_{1,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 4Z_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus \\
&\oplus 2Z_{2,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 3Z_{2,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
\bar{P}_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} =& Q_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Q_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Q_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Q_{1,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
\bar{P}_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} =& \bar{P}_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus \bar{P}_{1,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus \bar{P}_{1,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2P_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus \\
&\oplus 2Z_{2,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
P_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{1,0}^{\alpha_2,\beta_2} =& 2P_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 3P_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2P_{2,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2P_{2,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2P_{2,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus \\
&\oplus 2Z_{1,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{1,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
P_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} =& P_{1,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus P_{1,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus P_{1,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2P_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus \\
&\oplus 2Z_{2,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
P_{1,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} =& Q_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Q_{2,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Q_{2,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Q_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
P_{1,1}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{1,1}^{\alpha_2,\beta_2} =& 2Q_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
P_{1,1}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} =& P_{1,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus P_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 4Z_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 4Z_{1,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus \\
&\oplus 2Z_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{2,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
P_{2,0}^{\alpha_1,\beta_1} \otimes P_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} =& 2Q_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus P_{2,0}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus P_{2,0}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus P_{2,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus 2Z_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}
\end{aligned}$$

6.2 $p = 3$

Для $p = 3$ существуют следующие tilting-модули

- неприводимые модули $Z_{1,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{3,0}^{\alpha,\beta}$, $Z_{1,1}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,2}^{\alpha,\beta}$, $Z_{1,2}^{\alpha,\beta}$, $Z_{2,1}^{\alpha,\beta}$, $Z_{3,1}^{\alpha,\beta}$, $Z_{3,2}^{\alpha,\beta}$
- проективные модули $Q_{1,0}^{\alpha,\beta}$, $Q_{2,0}^{\alpha,\beta}$, $Q_{1,1}^{\alpha,\beta}$, $Q_{3,0}^{\alpha,\beta}$, $Q_{2,2}^{\alpha,\beta}$, $Q_{2,1}^{\alpha,\beta}$
- и модули $P_{3,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и $P_{2,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$, которые можно предстваить как подмодули проективные $Q_{3,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и $Q_{2,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ соответственно, модули J_{right}: $Jr_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$, $Jr_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и J_{left}: $Jl_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и $Jl_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$, которые можно предстваить как подмодули проективных $Q_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и $Q_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$ и модуль $Pir_{2,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$, как подмодуль

$Q^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{2,2}$. Графы модулей $P^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{2,2}$ и $P^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{3,0}$ такие же как и у модулей $P^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{1,1}$ и $P^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{2,0}$ для $p = 2$. Графы остальных модулей показаны на рисунках Fig.0.5, Fig.0.6, Fig.0.7, Fig.0.8 и Fig.0.9.

Тензорные произведения $Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,0}$ and $Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1}$ со всеми неприводимыми модулями следующие

$$
\begin{aligned}
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,0} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{s,r} = Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{s,r}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{1,1} = Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{1,2} \oplus Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{2,2}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{1,2} = Jr^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{2,0}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{2,0} = Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{1,0} \oplus Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{2,1}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{2,1} = Jr^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{1,1} \oplus Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{3,2}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{2,2} = P^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{3,0}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{3,0} = Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{2,0} \oplus Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{3,1}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{3,1} = Q^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{2,1} \oplus Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{3,2}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,1} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{3,2} = Q^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{2,2}
\end{aligned}
$$

Тензорные произведения $Z^{\alpha_1,\beta_1}_{1,2}$ с неприводимыми

$$
\begin{aligned}
&Z^{\alpha_1,\beta_2}_{1,2} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{1,2} = R^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{1,0} \oplus Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{2,1}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_2}_{1,2} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{2,0} = Jr^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{1,1}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_2}_{1,2} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{2,1} = Pir^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{2,2} \oplus Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{1,2} \oplus Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{3,0} \oplus Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{2,0}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_2}_{1,2} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{2,2} = Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{3,1} \oplus Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{2,1}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_2}_{1,2} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{3,0} = Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{3,2} \oplus Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{2,1}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_2}_{1,2} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{3,1} = Q^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{2,2} \oplus Z^{\alpha_{12},\beta_{12}}_{3,2}\\
&Z^{\alpha_1,\beta_2}_{1,2} \otimes Z^{\alpha_2,\beta_2}_{3,2} = Q^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{3,0} \oplus Z^{\alpha_{12},-\beta_{12}}_{3,1}
\end{aligned}
$$

Тензорные проеизведения $Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_1}$ с неприводимыми:

$$
\begin{aligned}
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{2,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= Z_{1,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{2,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Jr_{2,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{2,2}^{\alpha_2,\beta_2} &= Z_{3,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= P_{2,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{3,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{2,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,2}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}
\end{aligned}
$$

Тензорные произведения $Z_{2,1}^{\alpha_1,\beta_1}$ с неприводимыми

$$
\begin{aligned}
Z_{2,1}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{2,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus R_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{3,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{2,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{2,1}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{2,2}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{1,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
Z_{2,1}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{3,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{1,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \\
Z_{2,1}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Q_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{3,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{2,1}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,2}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Q_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2Z_{3,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}
\end{aligned}
$$

Тензорные произведения $Z_{2,2}^{\alpha_1,\beta_1}$ с неприводимыми

$$
\begin{aligned}
Z_{2,2}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{2,2}^{\alpha_2,\beta_2} &= Jl_{2,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{2,2}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{1,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{2,2}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{2,2}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,2}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{3,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{1,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}}
\end{aligned}
$$

Тензорные произведения $Z_{3,0}^{\alpha_1,\beta_1}$ с неприводимыми

$$
\begin{aligned}
Z_{3,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,0}^{\alpha_2,\beta_2} &= Jl_{1,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{3,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,1}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Q_{1,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \\
Z_{3,0}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,2}^{\alpha_2,\beta_2} &= Q_{2,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}
\end{aligned}
$$

И тензорные произведения $Z_{3,1}^{\alpha_1,\beta_1}$ и $Z_{3,2}^{\alpha_1,\beta_1}$ с неприводимыми:

$$Z_{3,1}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,1}^{\alpha_2,\beta_2} = Q_{3,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Q_{2,0}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus R_{1,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,2}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,2}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$$
$$Z_{3,1}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,2}^{\alpha_2,\beta_2} = Q_{1,0}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus 2R_{2,1}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$$
$$Z_{3,2}^{\alpha_1,\beta_2} \otimes Z_{3,2}^{\alpha_2,\beta_2} = Q_{2,2}^{\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Q_{1,1}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus R_{1,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{-\alpha_{12},-\beta_{12}} \oplus Z_{3,1}^{-\alpha_{12},\beta_{12}} \oplus Z_{3,2}^{\alpha_{12},\beta_{12}}$$

7 Выводы

В работе была описана алгебра $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ при произвольном параметре деформации и исследованы ее свойства, в частности были найдены тензорные произведения неприводимых модулей. Было введено определение спиновой цепочки как $(n+m)$-кратного тензорного произведения фундаментальных представлений алгебры $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$. Было описано действие на цепочке централизатора $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ - walled Brauer алгебры, приведено явное действие генераторов алгебры на базисные вектора и их графическое изображение.

Основным результатом работы является получение разложения цепочки как бимодуля над парой взаимных централизаторов $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ и q$\mathcal{WB}$.

Также были приведены некоторые результаты исследований случаев, когда параметр деформации алгебры $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$ равен корню из единицы степени 2 и 3. Как уже упомяналось, они в дальнейшем будут представлять наибольший физический интерес.

Приложение

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 2 & 0\end{pmatrix} \arrow[d, "-\beta"] \arrow[dr, "1"] \arrow[drr, "\alpha\beta"] & & \\
\begin{pmatrix}-\alpha & \beta\\ 1 & 0\end{pmatrix} \arrow[d, "\alpha\beta"] & \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ 1 & 0\end{pmatrix} \arrow[dl, "-\alpha\beta"] & \begin{pmatrix}-\alpha & -\beta\\ 1 & 0\end{pmatrix} \arrow[dll, "-\beta"] \\
\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 2 & 0\end{pmatrix} & &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 0.1. Graph of the module $P_{2,0}^{\alpha,\beta}$

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 1\end{pmatrix} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "1"] \arrow[drr, "-\alpha"] & & \\
\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 0\end{pmatrix} \arrow[dr, "\alpha"] & \begin{pmatrix}-\alpha & \beta\\ 1 & 0\end{pmatrix} \arrow[d, "1"] & \begin{pmatrix}-\alpha & -\beta\\ 1 & 0\end{pmatrix} \arrow[dl, "-\alpha"] \\
& \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 1\end{pmatrix} &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 0.2. Graph of the module $P_{1,1}^{\alpha,\beta}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \arrow[dl, "2\alpha\beta"'] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, "-1"] & \\
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \arrow[dr, "1"'] & \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \arrow[d, "-1"] & \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \arrow[dl, "1"] \\
 & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 0.3. Graph of the module $P_{1,0}^{\alpha,\beta}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \arrow[dl, "1"'] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, "-2\alpha\beta"] & \\
\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \arrow[dr, "1"'] & \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \arrow[d, "1"] & \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \arrow[dl, "-1"] \\
 & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 0.4. Graph of the module $\bar{P}_{1,0}^{\alpha,\beta}$

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \arrow[d, "{[s]^4}"] \arrow[dr, "{[s-1][s]^2}"] & \\
\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \arrow[dr, "1"'] & \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \arrow[d, "{[s]}"] \\
 & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 0.5. Graph of the module $Jr_{2,0}^{\alpha,\beta}$

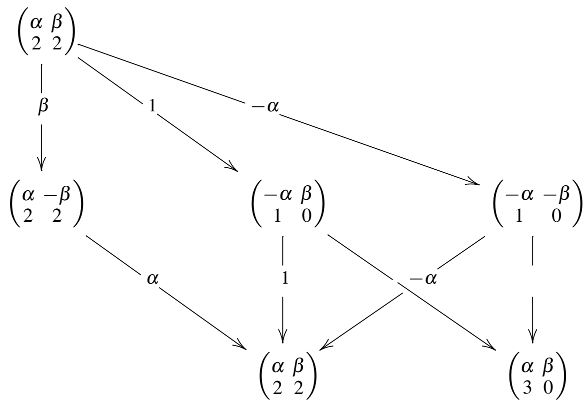


FIGURE 0.6. Graph of the module $Pir^{\alpha,\beta}_{2,2}$

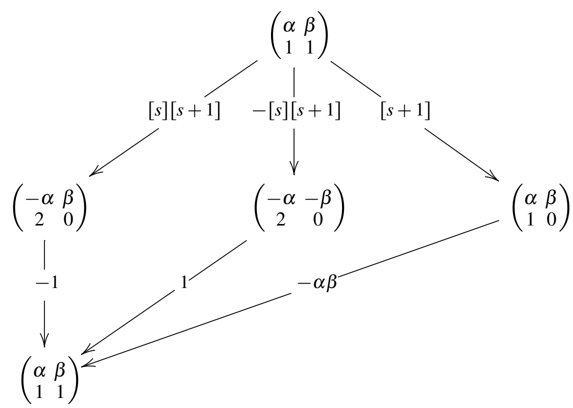


FIGURE 0.7. Graph of the module $Jl^{\alpha,\beta}_{1,1}$

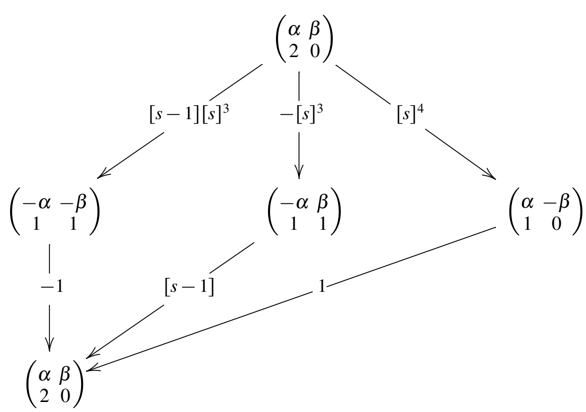


FIGURE 0.8. Graph of the module $Jl^{\alpha,\beta}_{2,0}$

Список литературы

[1] A. M. Gainutdinov, N. Read, H. Saleur and R. Vasseur, *The periodic* $sl(2|1)$ *alternating spin chain and its continuum limit as a bulk Logarithmic Conformal Field Theory at* $c = 0$

[2] A.M. Gainutdinov, R. Vasseur, *Lattice fusion rules and logarithmic operator product expansion*, arXiv:1203.6289v3 [hep-th].

[3] A.M. Gainutdinov, H. Saleur, I. Yu. Tipunin, *Lattice W-algebras and logarithmic CFTs*, arXiv:1212.1378v3 [hep-th].

[4] A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Representations of* $\bar{U}_q s\ell(2|1)$ *at even roots of unity*, arXiv:1312.5127v1 [math.QA].

[5] Enyang, *Cellular bases of the two-parameter version of the centraliser algebra for the mixed tensor representations of the quantum general linear group*, Combinatorial representation theory and related topics (Kyoto, 2002) 1310 (2003) 134–153.

[6] М. Гото, Ф. Гросханс, *Полупростые алгебры Ли*, М:Мир, 1981.

[7] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory—A First Course, Graduate Texts in Math*, Springer, Berlin (1991)

[8] C. Gómez, M. Ruiz-Altaba, G. Sierra, *Quantum groups in two dimensional physics*, Cambridge University Press (2005)

[9] M. Henkel, *Conformal Invariance and Critical phenomena*, Springer (1999)

[10] P. Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, *Conformal field theory*, Springer New York (1997)

[11] К. Кассель, *Квантовые группы*, М.: Фазис, 1999

[12] К. Кассель, В.Г. Тураев, *Группы кос*, М.: МЦНМО, 2014

[13] N. Read and H. Saleur, *Enlarged symmetry algebras of spin chains, loop models, and S-matrices*, Nucl. Phys. B **777**, 263 (2007).

[14] N. Read and H. Saleur, *Associative-algebraic approach to logarithmic conformal field theories*, Nucl. Phys. B **777**, 316 (2007).

[15] F. H. L. Essler, H. Frahm and H. Saleur, *Continuum limit of the integrable $sl(2|1)$ $3-\bar{3}$ superspin chain*, arXiv:cond-mat/0501197v1

[16] Hebing Rui and Linliang Song *The representations of quantized walled Brauer algebra*, arXiv:1403.7722v1 [math.QA].